

今回(2)のテーマは《2次関数の最大・最小》です。

☆2次関数の最大・最小の『場所』

定義域が、閉区間  $a \leq x \leq b$  である2次関数は、

最大値 & 最小値をもち、

最大値 =  $\max\{(\text{頂点}) \text{ or } \text{区間の左端} \text{ or } \text{区間の右端}\}$

最小値 =  $\min\{(\text{頂点}) \text{ or } \text{区間の左端} \text{ or } \text{区間の右端}\}$

☆2次関数の最大・最小

~~「下に凸の場合」&「最小値」について~~

☛ 頂点が区間内にあるとき…最小値 = 頂点の  $y$  座標

☛ 頂点が区間より左側に外れているとき

……最小値 = 区間の左端点の  $y$  座標

☛ 頂点が区間より右側に外れているとき

……最小値 = 区間の右端点の  $y$  座標

☆2次関数の最大・最小

~~「下に凸の場合」&「最大値」について~~

☛ 頂点が「区間の中点」より左にあるとき

……最大値 = 区間の右端点の  $y$  座標

☛ 頂点が「区間の中点」より右にあるとき

……最大値 = 区間の左端点の  $y$  座標

☛ 頂点の  $x$  座標 = 「区間の中点」の  $x$  座標 のとき

……最大値 = 区間の左端点 (or 右端点) の  $y$  座標

最も大切なことは、『グラフを描いて考える』姿勢です。



【1】(β 20) 2次関数  $f(x) = x^2 + 2x + 2$  について。

(1)  $f(x)$  の  $a \leq x \leq a+1$  における最大値を  $M$ , 最小値を  $m$  とするとき、 $M-m=1$  をみたす  $a$  の値を求めよ。

(2)  $M-m$  の最小値と、そのときの  $a$  の値を求めよ。

解  $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$

《軸:  $x = -1$ , 定義域(区間):  $a \leq x \leq a+1$ 》

最小値  $m$  について

- ・  $-1 \leq a$  のとき、 $m = f(a) = (a+1)^2 + 1$
- ・  $a \leq -1 \leq a+1$  i.e.  $-2 \leq a \leq -1$  のとき、 $m = f(-1) = 1$
- ・  $a+1 \leq -1$  i.e.  $a \leq -2$  のとき、

$$m = f(a+1) = (a+2)^2 + 1$$

最大値  $M$  について

- ・  $-1 \leq a + \frac{1}{2}$  i.e.  $-\frac{3}{2} \leq a$  のとき、

$$M = f(a+1) = (a+2)^2 + 1$$

- ・  $a + \frac{1}{2} \leq -1$  i.e.  $a \leq -\frac{3}{2}$  のとき、

$$M = f(a) = (a+1)^2 + 1$$

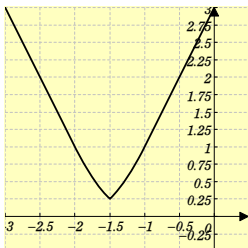
以上より、

☛  $a \leq -2$  のとき、 $M-m = (a+1)^2 - (a+2)^2 = -2a-3$

☛  $-2 \leq a \leq -\frac{3}{2}$  のとき、 $M-m = (a+1)^2$

☛  $-\frac{3}{2} \leq a \leq -1$  のとき、 $M-m = (a+2)^2$

☛  $-1 \leq a$  のとき、 $M-m = (a+2)^2 - (a+1)^2 = 2a+3$



であり、 $y = M-m$  のグラフは左図のようになる。(xy平面)

(1) 上図より、 $y = M-m = 1$  をみたす  $a$  の値は

$$a = -2, -1 \quad (\text{ans})$$



(iii)  $a \leq -1$  または  $1 \leq a$  のとき、

(i)・(ii)と同様にしてもできるが、次のように処理することもできる。

$$|f(-1) - f(1)| = |(1+2a+b) - (1-2a+b)| = |4a| \geq 4$$

であるので、

「 $f(x)$  の最大値が  $1$ 、最小値が  $-1$ 」となることはない。



**【3】**( $\alpha 20$ )  $x$  の関数  $f(x) = ax^2 - 2x + 1$  の  $-1 \leq x \leq 1$  における最大値  $M$ 、最小値  $m$  を求めよ。

解  $\blacktriangleright a = 0$  のとき、 $f(x) = -2x + 1$  であるので

$$M = f(-1) = 3, \quad m = f(1) = -1$$

$\blacktriangleright a \neq 0$  のとき、

$$f(x) = ax^2 - 2x + 1 = a \left( x - \frac{1}{a} \right)^2 + 1 - \frac{1}{a}$$

《軸:  $x = \frac{1}{a}$ , 定義域(区間):  $-1 \leq x \leq 1$ 》

注)  $a > 0$  ……下に凸      $a < 0$  ……上に凸

・  $\frac{1}{a} \leq -1$  i.e.  $-1 \leq a < 0$  のとき、

$$M = f(-1) = a + 3, \quad m = f(1) = a - 1$$

・  $-1 \leq \frac{1}{a} < 0$  i.e.  $a \leq -1$  のとき、

$$M = f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a}, \quad m = f(1) = a - 1$$

・  $0 < \frac{1}{a} \leq 1$  i.e.  $1 \leq a$  のとき、

$$M = f(-1) = a + 3, \quad m = f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a}$$

・  $1 \leq \frac{1}{a}$  i.e.  $0 < a \leq 1$  のとき、

$$M = f(-1) = a + 3, \quad m = f(1) = a - 1$$

以上をまとめると



ここで、③,  $a > 0$  より  $b < 0$  であるので、

$$b = -48 \quad \therefore a = 64 \quad (\text{これは③をみたます}) \quad (ans)$$

・  $a < 0$  のとき、同様に[※]に注意して、

$$f(x) \text{ の最大値} = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a},$$

$$f(x) \text{ の最小値} = f(1) = a + b$$

$$\therefore -\frac{b^2}{4a} = 16, \quad a + b = -9 \quad (a, b \text{ の連立方程式})$$

$a$  を消去して整理すると、

$$b^2 - 64b - 576 = 0 \quad \therefore (b+8) \cdot (b-72) = 0$$

ここで、③,  $a < 0$  より  $b > 0$  であるので、

$$b = 72 \quad \therefore a = -81 \quad (\text{これは③をみたます}) \quad (ans)$$



**【5】**(β 20)  $t$  を実数とし、 $t-1 \leq x \leq t$  における

関数  $f(x) = x^2 - 1$  の最大値を  $M(t)$ , 最小値を  $m(t)$  とする。

(1)  $t$  の関数  $Y = M(t)$ ,  $Y = m(t)$  のグラフを描け。

(2)  $M(t) - m(t)$  の最小値を求めよ。

解 関数  $y = f(x) = x^2 - 1$  のグラフは下に凸で、

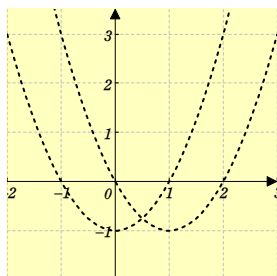
頂点は  $(0, -1)$  であり、

頂点が 区間  $t-1 \leq x \leq t$  に含まれるのは

$$t-1 \leq 0 \leq t \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ のときなので、}$$

$$M(t) = \max\{f(t-1), f(t)\}$$

$$m(t) = \begin{cases} -1 & (0 \leq t \leq 1) \\ \min\{f(t-1), f(t)\} & (t < 0, 1 < t) \end{cases}$$



また、 $Y = f(t) = t^2 - 1$ ,

$$Y = f(t-1) = (t-1)^2 - 1$$

のグラフは左図。

したがって

$Y = M(t)$ ,  $Y = m(t)$  のグラフはそれぞれ左上図の

赤線部, 青線部 (ans)

(2)  $Y = f(t)$ ,  $Y = f(t-1)$  のグラフがともに 直線  $t = \frac{1}{2}$

について対称であることに注意して、上図より

$M(t) - m(t)$  の最小値は

$$M\left(\frac{1}{2}\right) - m\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} - (-1) = \frac{1}{4} \quad (\text{ans})$$



**【6】**(β 30) 関数  $f(x) = -|x| \cdot (x-a) + (x+2a) \cdot |x-a|$

( $a > 0$ ) について、区間  $2a-3 \leq x \leq 2a-2$  における最大値

$M(a)$  を、 $a$  を用いて表せ。

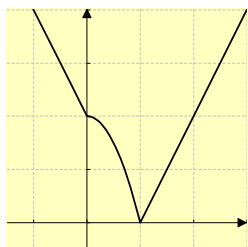
解  $f(x) = -|x| \cdot (x-a) + (x+2a) \cdot |x-a| \quad (a > 0)$

《定義域(区間) :  $2a-3 \leq x \leq 2a-2$  》

$$|x| = \begin{cases} x & (0 \leq x) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases}, \quad |x-a| = \begin{cases} x-a & (a \leq x) \\ -(x-a) & (x \leq a) \end{cases}$$

であるので、 $f(x) =$

$$\begin{cases} x \cdot (x-a) - (x+2a) \cdot (x-a) = -2a \cdot (x-a) & (x \leq 0) \\ -x \cdot (x-a) - (x+2a) \cdot (x-a) = -2 \cdot (x+a) \cdot (x-a) & (0 \leq x \leq a) \\ -x \cdot (x-a) + (x+2a) \cdot (x-a) = 2a \cdot (x-a) & (a \leq x) \end{cases}$$



よって  $y=f(x)$  のグラフは左図のようになる。

図より、区間  $2a-3 \leq x \leq 2a-2$  における  $f(x)$  の最大値  $M(a)$  は

$$M(a) = \max\{f(2a-2), f(2a-3)\}$$

ここで、

・  $2a-2 \leq 0$  i.e.  $0 < a \leq 1$  のとき

$$f(2a-2) = -2a \cdot (a-2)$$

・  $0 \leq 2a-2 \leq a$  i.e.  $1 \leq a \leq 2$  のとき

$$f(2a-2) = -2 \cdot (3a-2) \cdot (a-2)$$

・  $a \leq 2a-2$  i.e.  $2 \leq a$  のとき

$$f(2a-2) = 2a \cdot (a-2)$$

であり、

・  $2a-3 \leq 0$  i.e.  $0 < a \leq \frac{3}{2}$  のとき

$$f(2a-3) = -2a \cdot (a-3)$$

•  $0 \leq 2a-3 \leq a$  i.e.  $\frac{3}{2} \leq a \leq 3$  のとき

$$f(2a-3) = -6 \cdot (a-1) \cdot (a-3)$$

•  $a \leq 2a-3$  i.e.  $3 \leq a$  のとき

$$f(2a-3) = 2a \cdot (a-3)$$

ココマデは  $a$  は定数扱い ( $x$  が変数)

ココカラは  $a$  を変数扱い

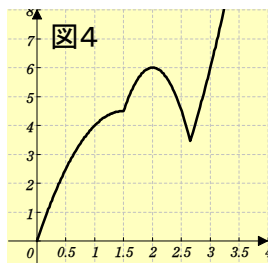
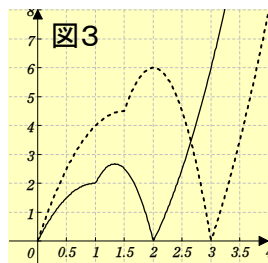
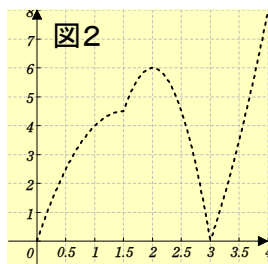
したがって、

$y=f(2a-2)$  のグラフは図1, 3(実線)

$y=f(2a-3)$  のグラフは図2, 3(点線) のようになり、

$$y = M(a) = \max\{f(2a-2), f(2a-3)\}$$

のグラフは図4のようになる。



さて、図4の点Pの  $a$  座標は

$$2a(a-2) = -6(a-1)(a-3) \quad (2 < a < 3)$$

$$\therefore 4a^2 - 14a + 9 = 0 \quad (2 < a < 3)$$

$$\therefore a = \frac{7 + \sqrt{13}}{4} \text{ であるので、}$$

$$0 < a \leq \frac{3}{2} \text{ のとき、 } M(a) = -2a \cdot (a-3)$$

$$\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{7 + \sqrt{13}}{4} \text{ のとき、 } M(a) = -6 \cdot (a-1) \cdot (a-3)$$

$$\frac{7 + \sqrt{13}}{4} \leq a \text{ のとき、 } M(a) = 2a \cdot (a-2)$$

} (ans)



【7】(β 20)  $a$  を定数とする2次関数

$f(x) = x^2 + 2ax + 2a + 4$  ,  $g(x) = -x^2 + 1$  がある。

- (1) すべての実数  $x$  に対して、 $f(x) > g(x)$  が成り立つとき、  
 $a$  のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) すべての実数  $x$  に対して  $f(x) > k > g(x)$  となる、実数  $k$   
が存在するとき、 $a$  の値の範囲を求めよ。

☆関数  $f(x)$  が 最大値  $M$  と 最小値  $m$  をもつとき、  
「すべての  $x$  に対して  $f(x) < k$ 」 $\Leftrightarrow M < k$   
「すべての  $x$  に対して  $f(x) > k$ 」 $\Leftrightarrow m > k$

解 (1) すべての実数  $x$  に対して

$$f(x) - g(x) = 2x^2 + 2ax + 2a + 3 > 0$$

となるための条件は、(判別式/4)  $= a^2 - 2 \cdot (2a + 3) < 0$

$$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{10} < a < 2 + \sqrt{10} \quad (\text{ans})$$

(2) すべての実数  $x$  に対して

$f(x) > k > g(x)$  となるための条件は

[ $f(x)$  の最小値]  $> k >$  [ $g(x)$  の最大値]

$$f(x) = (x+a)^2 - a^2 + 2a + 4, \quad g(x) = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow -a^2 + 2a + 4 > k > 1$$

これをみたす  $k$  が存在するのは

$$-a^2 + 2a + 4 > 1 \quad \therefore a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$\therefore (a-3)(a+1) < 0 \quad \therefore -1 < a < 3 \quad (\text{ans}) \text{ のときである。}$$



【8】(β 20) 関数  $f(x) = -x^2 + 4x + a - 5$  ,

$g(x) = x^2 + 4x + 3$  について、次の各問に答えよ。

- (1)  $-3 \leq x \leq 3$  において、つねに  $f(x) > g(x)$  となるのは、  
 $a$  がどのような範囲にあるときか。
- (2)  $-3 \leq x \leq 3$  において、 $f(x) > g(x)$  となる  $x$  が存在するの  
は、 $a$  がどのような範囲にあるときか。

(3)  $x_1, x_2$  が  $-3 \leq x_1 \leq 3, -3 \leq x_2 \leq 3$  をみたすとき、つねに  $f(x_1) > g(x_2)$  となるのは、 $a$  がどのような範囲にあるときか。

(4)  $x_1, x_2$  が  $-3 \leq x_1 \leq 3, -3 \leq x_2 \leq 3$  をみたすとき、 $f(x_1) > g(x_2)$  となる  $x_1, x_2$  が存在するのは、 $a$  がどのような範囲にあるときか。

(前問の☆に加えて)

☆関数  $f(x)$  が最大値  $M$  をもつとき、  
「ある  $x$  に対して  $f(x) > k$ 」  
 $\Leftrightarrow$  「 $f(x) > k$  となる  $x$  が存在する」  $\Leftrightarrow M > k$

解  $f(x) = -x^2 + 4x + a - 5, g(x) = x^2 + 4x + 3$

( $-3 \leq x \leq 3$  ……本問中ずつと)

また、 $h(x) = f(x) - g(x) = -2x^2 + a - 8$  とおく。

(1) つねに  $f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow$  つねに  $h(x) > 0 \Leftrightarrow [h(x) \text{ の最小値}] > 0$

$\Leftrightarrow h(3) = h(-3) = a - 26 > 0 \Leftrightarrow a > 26$  (ans)

(2)  $f(x) > g(x)$  となる  $x$  が存在する。

$\Leftrightarrow h(x) > 0$  となる  $x$  が存在する。

$\Leftrightarrow [h(x) \text{ の最大値}] > 0 \Leftrightarrow h(0) = a - 8 > 0$

$\Leftrightarrow a > 8$  (ans)

(3) つねに  $f(x_1) > g(x_2) \Leftrightarrow$  つねに  $f(x_1) - g(x_2) > 0$

$\Leftrightarrow [f(x_1) - g(x_2) \text{ の最小値}] > 0$

$\Leftrightarrow [f(x_1) \text{ の最小値}] - [g(x_2) \text{ の最大値}] > 0$

$$f(x) = -(x-2)^2 + a - 1, g(x) = (x+2)^2 - 1$$

$\Leftrightarrow f(-3) - g(3) > 0$

$\Leftrightarrow (a-26) - 24 > 0 \Leftrightarrow a > 50$  (ans)

(4)  $f(x_1) > g(x_2)$  となる  $x_1, x_2$  が存在する

$\Leftrightarrow f(x_1) - g(x_2) > 0$  となる  $x_1, x_2$  が存在する

$\Leftrightarrow [f(x_1) - g(x_2) \text{ の最大値}] > 0$

$\Leftrightarrow [f(x_1) \text{ の最大値}] - [g(x_2) \text{ の最小値}] > 0$



$$= \begin{cases} 4a^2 - 16a - 4 = 4(a-2)^2 - 20 & (0 \leq a \leq 4) \\ -4a^2 + 16a - 4 = -4(a-2)^2 + 12 & (a \leq 0, 4 \leq a) \end{cases} \quad (\text{ans})$$

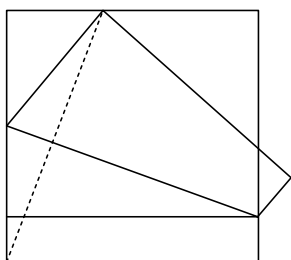
よって  $m(a)$  は、 $a = 0, 4$  のとき 最大値  $-4$  をとる。(ans)



**【10】**(β 20) 一辺の長さが1の正方形  $ABCD$  がある。  
 線分  $AB$  上の点  $P$  と線分  $CD$  上の点  $Q$  でこの正方形を折り  
 曲げて、点  $B$  が線分  $AD$  上の点  $R$  にくるようにした。 $PB=x$  ,  
 $QC=y$  ,  $DR=z$  とするとき、次の各問に答えよ。

- (1)  $x$  を  $z$  のみの関数として表せ。
- (2)  $y$  を  $z$  のみの関数として表せ。
- (3) 折り曲げられた部分  $PBCQ$  の面積の最小値を求めよ。

解 (1) 直角三角形  $APR$  において、 $AP = 1-x$  ,  $AR = 1-z$  ,



$PR = PB = x$  なので、  
 三平方の定理より  
 $(1-x)^2 + (1-z)^2 = x^2$   
 $\therefore x = \frac{1}{2}z^2 - z + 1 \quad (\text{ans})$

(2) 直角三角形  $RDQ$  において、

$RD = z$  ,  $DQ = 1-y$  ,  $QR = QB = \sqrt{y^2 + 1}$  なので、

三平方の定理より

$z^2 + (1-y)^2 = y^2 + 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}z^2 \quad (\text{ans})$

[別解(2)]  $Q$  から  $AB$  に下ろした垂線の足を  $H$  とすると、

$\triangle PQH \cong \triangle RBA$

$\therefore \angle PQH = 90^\circ - \angle HPQ = \angle RBA$  ,  $HQ = AB = 1$

よって  $HP = AR \quad \therefore x - y = 1 - z$

$\therefore$  (1) の結果に注意して、

$y = x + z - 1 = \left(\frac{1}{2}z^2 - z + 1\right) + z - 1 = \frac{1}{2}z^2 \quad (\text{ans})$

(3) 折り曲げられた部分PBCQの面積をSとおくと、

$$S = \frac{1}{2} \cdot (x+y) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot (z^2 - z + 1) = \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{8}$$

図よりzの変域は  $0 < z < 1$  なので、

$$S \text{ の最小値} = \frac{3}{8} \quad \left( z = \frac{1}{2} \text{ のとき} \right) \quad (\text{ans})$$



【11】(β 10)  $x > 0$  のとき、

$f(x) = (x^2 - 6x + 1) + \left( \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 \right)$  の最小値と、そのときの  $x$  の値を求めよ。

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= (x^2 - 6x + 1) + \left( \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x} + 1 \right) \\ &= \left( x^2 + \frac{1}{x^2} \right) - 6 \cdot \left( x + \frac{1}{x} \right) + 2 \\ &= \left\{ \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} \right\} - 6 \cdot \left( x + \frac{1}{x} \right) + 2 \end{aligned}$$

$$\text{対称式 } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad \left( a=x, b=\frac{1}{x} \right)$$

ここで  $x + \frac{1}{x} = t$  とおくと、

$$f(x) = (t^2 - 2) - 6t + 2 = t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9 \dots\dots ①$$

(= $g(t)$ )とおく)

であり、 $x > 0$  なので、相加・相乗平均の不等式より

$$t = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2 \quad \therefore t \geq 2 \dots\dots ②$$

(等号は  $x = \frac{1}{x}$  i.e.  $x = 1$  のとき)

①②より  $\min.g(t) = g(3) = -9$  (ans)

であり、このとき、( $t =$ )  $x + \frac{1}{x} = 3$  より  $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$  (ans)

[参考] ②は  $x + \frac{1}{x} = \left( \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 + 2$  と変形しても出てきます。



**【12】**(α10)  $x$  の関数

$f(x) = a \cdot (x^2 + 2x + 2)^2 + 2a \cdot (x^2 + 2x + 2) + b$  は最小値 6 をもち、  
 $f(0) = 11$  である。

(1)  $a, b, f(1)$  の値を求めよ。

(2)  $f(x) = 6$  をみたす  $x$  の値を求めよ。

---

解 (1)  $f(x) = a \cdot (x^2 + 2x + 2)^2 + 2a \cdot (x^2 + 2x + 2) + b$

$$f(0) = 11 \text{ より } 8a + b = 11 \dots\dots\textcircled{1}$$

さて、 $t = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$  とおくと、

$t$  のとりうる値の範囲は  $t \geq 1 \dots\dots\textcircled{2}$

☆置き換えたときは、変域に注意。

であり、 $f(x) = at^2 + 2at + b = a \cdot (t+1)^2 - a + b (= g(t)$  とおく)

②に注意して、 $\min g(t) = g(1) = 3a + b$

$\therefore$  問題文より  $3a + b = 6 \dots\dots\textcircled{3}$

①③から  $a = 1, b = 3$  (ans)

$$\therefore g(t) = t^2 + 2t + 3$$

$$\therefore f(1) = g(5) = 5^2 + 2 \cdot 5 + 3 = 38 \text{ (ans)}$$

$$(2) f(x) = 6 \quad \therefore g(t) = 6 \quad \therefore t^2 + 2t + 3 = 6$$

$$\therefore t^2 + 2t - 3 = 0 \quad \therefore (t+3)(t-1) = 0$$

$\therefore t = 1$  (②に注意)

$$\text{したがって } (x+1)^2 + 1 = 1 \quad \therefore x = -1 \text{ (ans)}$$

