β 講座	〔2次〕関数（2）

今回（2）のテーマは《2次関数の最大・最小》です。

☆2次関数の最大・最小 の『場所』

定義域が，閉区間 $a \leqq x \leqq b$ である2次関数は、

最大値＆最小値をもち、

最大値 $= max$ {（頂点）or 区間の左端 or 区間の右端}

最小値 $= min$ {（頂点）or 区間の左端 or 区間の右端}

☆2次関数の最大・最小

～～「下に凸の場合」＆「最小値」について～～

☛頂点が区間内にあるとき…最小値＝頂点の y 座標

☛頂点が区間より左側に外れているとき

……最小値＝区間の左端点の y 座標

☛頂点が区間より右側に外れているとき

……最小値＝区間の右端点の y 座標

☆2次関数の最大・最小

～～「下に凸の場合」＆「最大値」について～～

☛頂点が「区間の中点」より左にあるとき

……最大値＝区間の右端点の y 座標

☛頂点が「区間の中点」より右にあるとき

……最大値＝区間の左端点の y 座標

☛頂点の x 座標＝「区間の中点」の x 座標 のとき

……最大値＝区間の左端点（or右端点）の y 座標

最も大切なコトは、『グラフを描いて考える』姿勢です。

◆◆◆

【１】（β20） ２次関数 $f(x)=x^2+2x+2$ について。

(1) $f(x)$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を M，最小値を m とするとき、$M-m=1$ をみたす a の値を求めよ。

(2) $M-m$ の最小値と、そのときの a の値を求めよ。

解　$f(x)=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$

《軸：$x=-1$，定義域（区間）：$a \leqq x \leqq a+1$》

最小値 m について

・$-1 \leqq a$ のとき、$m=f(a)=(a+1)^2+1$

・$a \leqq -1 \leqq a+1$　i.e.　$-2 \leqq a \leqq -1$ のとき、$m=f(-1)=1$

・$a+1 \leqq -1$　i.e.　$a \leqq -2$ のとき、

$$m=f(a+1)=(a+2)^2+1$$

最大値 M について

・$-1 \leqq a+\dfrac{1}{2}$　i.e.　$-\dfrac{3}{2} \leqq a$ のとき、

$$M=f(a+1)=(a+2)^2+1$$

・$a+\dfrac{1}{2} \leqq -1$　i.e.　$a \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき、

$$M=f(a)=(a+1)^2+1$$

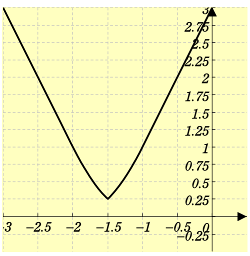
以上より、

☛ $a \leqq -2$ のとき、$M-m=(a+1)^2-(a+2)^2=-2a-3$

☛ $-2 \leqq a \leqq -\dfrac{3}{2}$ のとき、$M-m=(a+1)^2$

☛ $-\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq -1$ のとき、$M-m=(a+2)^2$

☛ $-1 \leqq a$ のとき、$M-m=(a+2)^2-(a+1)^2=2a+3$



であり、$y=M-m$ のグラフは左図のようになる。（ay平面）

(1) 上図より、$y=M-m=1$ をみたす a の値は

$a=-2,\ -1$　(ans)

(2) 上図より、$y=M-m$ は、

$a=-\dfrac{3}{2}$ のとき 最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。　(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【2】（β20）　2次関数 $y=x^2-2ax+b$ を考える。

(1) この関数のグラフの頂点の座標を a, b を用いて表せ。

(2) x の変域を $-1 \leqq x \leqq 1$ としたときの y の最大値と最小値を a, b を用いて表せ。

(3) $-1 \leqq x \leqq 1$ における y の最大値が 1, 最小値が -1 となる a, b の値を求めよ。

解　$y=f(x)=x^2-2ax+b=(x-a)^2+b-a^2$

《軸 : $x=a$, 定義域（区間） : $-1 \leqq x \leqq 1$》

(1) $(a, b-a^2)$　(ans)

(2) $f(x)$ の最小値 $=\begin{cases} a \leqq -1 \text{ のとき、} f(-1)=1+2a+b \\ -1 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき、} f(a)=b-a^2 \\ 1 \leqq a \text{ のとき、} f(1)=1-2a+b \end{cases}$ (ans)

$f(x)$ の最大値 $=\begin{cases} a \leqq 0 \text{ のとき、} f(1)=1-2a+b \\ 0 \leqq a \text{ のとき、} f(-1)=1+2a+b \end{cases}$ (ans)

(3) (2) の結果を表にまとめると、下のようになる。

a	……	-1	……	0	……	1	……
最大値	$f(1)$		$f(1)$		$f(-1)$		$f(-1)$
最小値	$f(-1)$		$f(a)$		$f(a)$		$f(1)$

（ⅰ）$-1 \leqq a \leqq 0$ のとき、

「$f(x)$ の最大値が 1, 最小値が -1」となる条件は

$f(1)=1-2a+b=1$　,　$f(a)=b-a^2=-1$

$\therefore\ a^2-2a-1=0$　　よって　$a=1-\sqrt{2}$, $b=2\cdot(1-\sqrt{2})$　(ans)

（ⅱ）$0 \leqq a \leqq 1$ のとき、

「$f(x)$ の最大値が 1, 最小値が -1」となる条件は

$f(-1)=1+2a+b=1$　,　$f(a)=b-a^2=-1$

よって　$a=-1+\sqrt{2}$, $b=2\cdot(1-\sqrt{2})$　(ans) （iii）$a \leqq -1$ または $1 \leqq a$ のとき、

（ｉ）・（ii）と同様にしてもできるが、次のように処理することもできる。

$|f(-1)-f(1)| = |(1+2a+b)-(1-2a+b)| = |4a| \geqq 4$

であるので、

「$f(x)$ の最大値が 1，最小値が -1」となることはない。

◆◆

【3】（α20） x の関数 $f(x)=ax^2-2x+1$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値M，最小値m を求めよ。

解 ☛ $a=0$ のとき、$f(x)=-2x+1$ であるので

$M=f(-1)=3$ ， $m=f(1)=-1$

☛ $a \neq 0$ のとき、

$$f(x)=ax^2-2x+1=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a}$$

《軸：$x=\dfrac{1}{a}$ ，定義域（区間）：$-1 \leqq x \leqq 1$》

注）$a>0$ ……下に凸　　$a<0$ ……上に凸

・$\dfrac{1}{a} \leqq -1$　i.e.　$-1 \leqq a < 0$ のとき、

$M=f(-1)=a+3$ ， $m=f(1)=a-1$

・$-1 \leqq \dfrac{1}{a} < 0$　i.e.　$a \leqq -1$ のとき、

$M=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\dfrac{1}{a}$ ， $m=f(1)=a-1$

・$0 < \dfrac{1}{a} \leqq 1$　i.e.　$1 \leqq a$ のとき、

$M=f(-1)=a+3$ ， $m=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\dfrac{1}{a}$

・$1 \leqq \dfrac{1}{a}$　i.e.　$0 < a \leqq 1$ のとき、

$M=f(-1)=a+3$ ， $m=f(1)=a-1$

以上をまとめると

$$M = \begin{cases} a+3 & (-1 \leqq a) \\ 1-\dfrac{1}{a} & (a \leqq -1) \end{cases} \quad , \quad m = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{a} & (1 \leqq a) \\ a-1 & (a \leqq 1) \end{cases} \quad (ans)$$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【4】（β20） 2次関数 $f(x)=ax^2+bx$ について。

(1) $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標が $(1\,,\,2)$ であるとき、
$a\,,\,b$ の値を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最大値が 16，最小値が -9 であるとき、$a\,,\,b$ の値を求めよ。

解 $f(x)=ax^2+bx=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a} \qquad (a \neq 0)$

《軸：$x=-\dfrac{b}{2a}$ ，定義域（区間）：$0 \leqq x \leqq 1$》

(1) 問題文より $-\dfrac{b}{2a}=1$ …①　　$-\dfrac{b^2}{4a}=2$ …②

②÷①より $\dfrac{b}{2}=2 \quad \therefore b=4 \quad \therefore a=-2 \quad (ans)$

(2)『区間の左端 $f(0)=0$ が、$f(x)$ の最大値でも最小値でもない…[※]』ことに注意すると、メンドーな場合分けを回避できます。

$-\dfrac{b}{2a} \leqq 0$ または $1 \leqq -\dfrac{b}{2a}$ と（仮定）すると、

$f(x)$ は、区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において
（単調）増加 または（単調）減少となり、[※]に反する。

よって $0 < -\dfrac{b}{2a} < 1$ ……③

・$a>0$ のとき、[※]に注意して、

$f(x)$ の最大値 $=f(1)=a+b$ ，

$f(x)$ の最小値 $=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{b^2}{4a}$

$\therefore a+b=16$ ，$-\dfrac{b^2}{4a}=-9$ （$a\,,\,b$ の連立方程式）

a を消去して整理すると、

$b^2+36b-576=0 \qquad \therefore (b+48)\cdot(b-12)=0$

ここで、③, $a>0$ より $b<0$ であるので、

$b=-48 \quad \therefore a=64$ （これは③をみたす） (ans)

・$a<0$ のとき、同様に[※]に注意して、

$f(x)$ の最大値 $=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=-\dfrac{b^2}{4a}$,

$f(x)$ の最小値 $=f(1)=a+b$

$\therefore -\dfrac{b^2}{4a}=16$, $a+b=-9$ （a , b の連立方程式）

a を消去して整理すると、

$b^2-64b-576=0 \quad \therefore (b+8)\cdot(b-72)=0$

ここで、③, $a<0$ より $b>0$ であるので、

$b=72 \quad \therefore a=-81$ （これは③をみたす） (ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【5】(β 20) t を実数とし、$t-1 \leqq x \leqq t$ における

関数 $f(x)=x^2-1$ の最大値を $M(t)$, 最小値を $m(t)$ とする。

(1) t の関数 $Y=M(t)$, $Y=m(t)$ のグラフを描け。

(2) $M(t)-m(t)$ の最小値を求めよ。

解　関数 $y=f(x)=x^2-1$ のグラフは下に凸で、

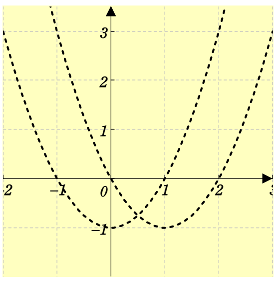
頂点は $(0, -1)$ であり、

頂点が 区間 $t-1 \leqq x \leqq t$ に含まれるのは

$t-1 \leqq 0 \leqq t \quad$ i.e. $\quad 0 \leqq t \leqq 1$ のときなので、

$M(t)=max\{f(t-1), f(t)\}$

$$m(t)=\begin{cases} -1 & (0 \leqq t \leqq 1) \\ min\{f(t-1), f(t)\} & (t<0\ ,\ 1<t) \end{cases}$$



また、$Y=f(t)=t^2-1$,

$Y=f(t-1)=(t-1)^2-1$

のグラフは左図。

したがって

$Y=M(t)$, $Y=m(t)$ のグラフはそれぞれ左上図の

赤線部, 青線部　　(ans)

(2) $Y=f(t)$, $Y=f(t-1)$ のグラフがともに 直線 $t=\dfrac{1}{2}$

について対称であることに注意して、上図より

$M(t)-m(t)$ の最小値は

$$M\left(\frac{1}{2}\right)-m\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}-(-1)=\frac{1}{4} \qquad (ans)$$

◆◆

【6】（β30） 関数 $f(x)=-|x|\cdot(x-a)+(x+2a)\cdot|x-a|$ $(a>0)$ について、区間 $2a-3\leqq x\leqq 2a-2$ における最大値 $M(a)$ を、a を用いて表せ。

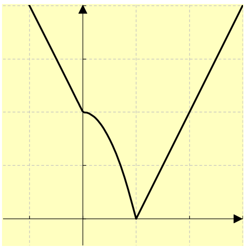
解　$f(x)=-|x|\cdot(x-a)+(x+2a)\cdot|x-a| \qquad (a>0)$

《定義域（区間）: $2a-3\leqq x\leqq 2a-2$ 》

$$|x|=\begin{cases} x & (0\leqq x) \\ -x & (x\leqq 0)\end{cases} \quad , \quad |x-a|=\begin{cases} x-a & (a\leqq x) \\ -(x-a) & (x\leqq a)\end{cases}$$

であるので、$f(x)=$

$$\begin{cases} x\cdot(x-a)-(x+2a)\cdot(x-a)=-2a\cdot(x-a) & (x\leqq 0) \\ -x\cdot(x-a)-(x+2a)\cdot(x-a)=-2\cdot(x+a)\cdot(x-a) & (0\leqq x\leqq a) \\ -x\cdot(x-a)+(x+2a)\cdot(x-a)=2a\cdot(x-a) & (a\leqq x)\end{cases}$$



よって $y=f(x)$ のグラフは左図のようになる。

図より、区間 $2a-3\leqq x\leqq 2a-2$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$ は

$M(a)=max\{f(2a-2), f(2a-3)\}$

ここで、

・$2a-2\leqq 0$ 　i.e.　$0<a\leqq 1$ のとき

$$f(2a-2)=-2a\cdot(a-2)$$

・$0\leqq 2a-2\leqq a$ 　i.e.　$1\leqq a\leqq 2$ のとき

$$f(2a-2)=-2\cdot(3a-2)\cdot(a-2)$$

・$a\leqq 2a-2$ 　i.e.　$2\leqq a$ のとき

$$f(2a-2)=2a\cdot(a-2)$$

であり、

・$2a-3\leqq 0$ 　i.e.　$0<a\leqq \dfrac{3}{2}$ のとき

$$f(2a-3)=-2a\cdot(a-3)$$

・$0 \leqq 2a-3 \leqq a$　i.e.　$\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq 3$ のとき

$$f(2a-3) = -6\cdot(a-1)\cdot(a-3)$$

・$a \leqq 2a-3$　i.e.　$3 \leqq a$ のとき

$$f(2a-3) = 2a\cdot(a-3)$$

ココマデは a は定数扱い（xが変数）
ココカラは a を変数扱い

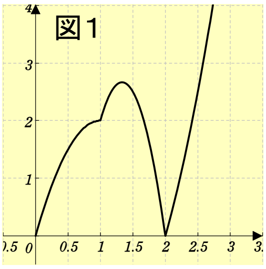
したがって、

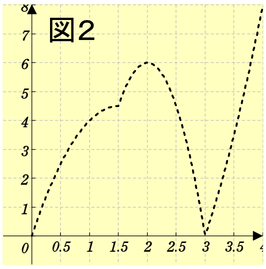
$y=f(2a-2)$ のグラフは図1，3（実線）

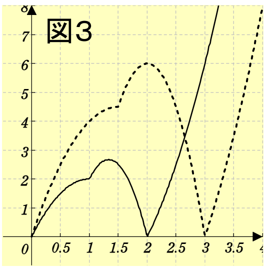
$y=f(2a-3)$ のグラフは図2，3（点線）のようになり、

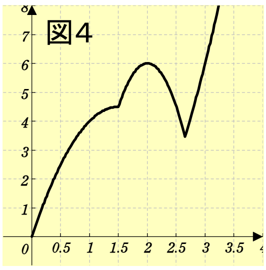
$y = M(a) = max\{f(2a-2), f(2a-3)\}$

のグラフは図4のようになる。









さて、図4の点P の a 座標は

$2a(a-2) = -6(a-1)(a-3)$　$(2<a<3)$

$\therefore 4a^2-14a+9 = 0$　$(2<a<3)$

$\therefore a = \dfrac{7+\sqrt{13}}{4}$ であるので、

$$\left.\begin{array}{l} 0<a\leqq\dfrac{3}{2} \text{ のとき、} M(a) = -2a\cdot(a-3) \\ \dfrac{3}{2}\leqq a\leqq\dfrac{7+\sqrt{13}}{4} \text{ のとき、} M(a) = -6\cdot(a-1)\cdot(a-3) \\ \dfrac{7+\sqrt{13}}{4}\leqq a \text{ のとき、} M(a) = 2a\cdot(a-2) \end{array}\right\} (ans)$$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【7】(β20) aを定数とする2次関数

$f(x)=x^2+2ax+2a+4$, $g(x)=-x^2+1$ がある。

(1) すべての実数 x に対して、$f(x)>g(x)$ が成り立つとき、a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) すべての実数 x に対して $f(x)>k>g(x)$ となる、実数 k が存在するとき、a の値の範囲を求めよ。

☆関数 $f(x)$ が 最大値M と 最小値m をもつとき、
「すべての x に対して $f(x)<k$」$\Leftrightarrow$ $M<k$
「すべての x に対して $f(x)>k$」$\Leftrightarrow$ $m>k$

解 (1) すべての実数 x に対して

$f(x)-g(x)=2x^2+2ax+2a+3>0$

となるための条件は、(判別式/4) $=a^2-2\cdot(2a+3)<0$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{10}<a<2+\sqrt{10}$ (ans)

(2) すべての実数 x に対して

$f(x)>k>g(x)$ となるための条件は

〔$f(x)$ の最小値〕$>k>$〔$g(x)$ の最大値〕

$f(x)=(x+a)^2-a^2+2a+4$, $g(x)=-x^2+1$

$\Leftrightarrow -a^2+2a+4>k>1$

これをみたす k が存在するのは

$-a^2+2a+4>1$ $\therefore a^2-2a-3<0$

$\therefore (a-3)(a+1)<0$ $\therefore -1<a<3$ (ans) のときである。

◆◆

【8】(β20) 関数 $f(x)=-x^2+4x+a-5$,

$g(x)=x^2+4x+3$ について、次の各問に答えよ。

(1) $-3\leqq x\leqq 3$ において，つねに $f(x)>g(x)$ となるのは、a がどのような範囲にあるときか。

(2) $-3\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)>g(x)$ となる x が存在するのは、a がどのような範囲にあるときか。

(3) x_1, x_2 が $-3 \leqq x_1 \leqq 3$, $-3 \leqq x_2 \leqq 3$ をみたすとき，つねに $f(x_1) > g(x_2)$ となるのは、a がどのような範囲にあるときか。

(4) x_1, x_2 が $-3 \leqq x_1 \leqq 3$, $-3 \leqq x_2 \leqq 3$ をみたすとき，$f(x_1) > g(x_2)$ となる x_1, x_2 が存在するのは、a がどのような範囲にあるときか。

（前問の☆に加えて）

☆関数 $f(x)$ が最大値 M をもつとき、 「ある x に対して $f(x) > k$ 」 $\Leftrightarrow$「$f(x) > k$ となる x が存在する」 $\Leftrightarrow$ $M > k$

解　$f(x) = -x^2+4x+a-5$ ，$g(x) = x^2+4x+3$

（$-3 \leqq x \leqq 3$ ……本問中ずっと）

また、$h(x) = f(x)-g(x) = -2x^2+a-8$ とおく。

(1) つねに $f(x) > g(x)$

$\Leftrightarrow$ つねに $h(x) > 0$ $\Leftrightarrow$〔$h(x)$ の最小値〕> 0

$\Leftrightarrow h(3) = h(-3) = a-26 > 0 \Leftrightarrow a > 26$　(ans)

(2) $f(x) > g(x)$ となる x が存在する。

$\Leftrightarrow h(x) > 0$ となる x が存在する。

$\Leftrightarrow$〔$h(x)$ の最大値〕$> 0 \Leftrightarrow h(0) = a-8 > 0$

$\Leftrightarrow a > 8$　(ans)

(3) つねに $f(x_1) > g(x_2)$ $\Leftrightarrow$ つねに $f(x_1) - g(x_2) > 0$

$\Leftrightarrow$〔$f(x_1) - g(x_2)$ の最小値〕> 0

$\Leftrightarrow$〔$f(x_1)$ の最小値〕$-$〔$g(x_2)$ の最大値〕> 0

$\boxed{f(x) = -(x-2)^2+a-1 \quad , \quad g(x) = (x+2)^2-1}$

$\Leftrightarrow f(-3) - g(3) > 0$

$\Leftrightarrow (a-26) - 24 > 0 \Leftrightarrow a > 50$　(ans)

(4) $f(x_1) > g(x_2)$ となる x_1, x_2 が存在する

$\Leftrightarrow f(x_1) - g(x_2) > 0$ となる x_1, x_2 が存在する

$\Leftrightarrow$〔$f(x_1) - g(x_2)$ の最大値〕> 0

$\Leftrightarrow$〔$f(x_1)$ の最大値〕$-$〔$g(x_2)$ の最小値〕> 0

$$\boxed{f(x) = -(x-2)^2+a-1 \quad , \quad g(x) = (x+2)^2-1}$$

$\Leftrightarrow f(2) - g(-2) > 0$

$\Leftrightarrow (a-1) - (-1) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \qquad (ans)$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【9】(β20)　a は定数とする。

関数 $f(x) = x^2 - 4\cdot|x-a(a-4)|$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

また、$m(a)$ の最大値を求めよ。

解　$f(x) = x^2-4\cdot|x-a(a-4)|$

・$x \leqq a(a-4)$ のとき

$f(x) = x^2+4x-4a(a-4) = (x+2)^2 -4a^2+16a-4$ …①

・$a(a-4) \leqq x$ のとき

$f(x) = x^2-4x+4a(a-4) = (x-2)^2 +4a^2-16a-4$ …②

であるので、

(ｉ) $a(a-4) \leqq -2$ のとき、$y=f(x)$ のグラフは（板書）図1

のようになり、$m(a) = f(2) = 4a^2-16a-4$

(ⅱ) $-2 \leqq a(a-4) \leqq 2$ のとき、

$y=f(x)$ のグラフは（板書）図2のようになり、

$m(a) = min\{ f(-2) , f(2)\}$

$= min\left\{ -4a^2+16a-4 , 4a^2-16a-4 \right\}$

$$= \begin{cases} -4a^2+16a-4 & (0\leqq a(a-4)\leqq 2) \\ 4a^2-16a-4 & (-2\leqq a(a-4)\leqq 0) \end{cases}$$

〔$\because$ $(4a^2-16a-4) - (-4a^2+16a-4) = 8a(a-4)$ 〕

(ⅲ) $2 \leqq a(a-4)$ のとき、

$y=f(x)$ のグラフは（板書）図3のようになり、

$m(a) = f(-2) = -4a^2+16a-4$

以上をまとめると、

$$m(a) = \begin{cases} 4a^2-16a-4 & (a(a-4) \leqq 0) \\ -4a^2+16a-4 & (0 \leqq a(a-4)) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 4a^2-16a-4 = 4(a-2)^2-20 & (\ 0 \leqq a \leqq 4\ ) \\ -4a^2+16a-4 = -4(a-2)^2+12 & (\ a \leqq 0\ ,\ 4 \leqq a\ ) \end{cases} \quad (ans)$$

よって $m(a)$ は、$a=0\ ,\ 4$ のとき 最大値 -4 をとる。(ans)

◆◆

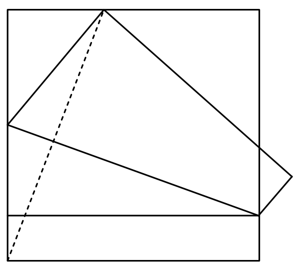
【10】（β20） 一辺の長さが1の正方形 $ABCD$ がある。線分 AB 上の点 P と線分 CD 上の点 Q でこの正方形を折り曲げて、点 B が線分 AD 上の点 R にくるようにした。$PB=x$, $QC=y$, $DR=z$ とするとき、次の各問に答えよ。

(1) x を z のみの関数として表せ。

(2) y を z のみの関数として表せ。

(3) 折り曲げられた部分 $PBCQ$ の面積の最小値を求めよ。

解 (1) 直角3角形 APR において、$AP=1-x$, $AR=1-z$,



$PR=PB=x$ なので、

三平方の定理より

$$(1-x)^2+(1-z)^2=x^2$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}z^2-z+1 \quad (ans)$$

(2) 直角3角形 RDQ において、

$RD=z$, $DQ=1-y$, $QR=QB=\sqrt{y^2+1}$ なので、

三平方の定理より

$$z^2+(1-y)^2=y^2+1 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}z^2 \quad (ans)$$

[別解(2)] Q から AB に下ろした垂線の足を H とすると、

$\triangle PQH \equiv \triangle RBA$

$\because \angle PQH=90°-\angle HPQ=\angle RBA$, $HQ=AB=1$

よって $HP=AR \qquad \therefore x-y=1-z$

$\therefore$(1) の結果に注意して、

$$y=x+z-1=\left(\frac{1}{2}z^2-z+1\right)+z-1=\frac{1}{2}z^2 \quad (ans)$$

(3) 折り曲げられた部分$PBCQ$ の面積をS とおくと、

$$S=\frac{1}{2}\cdot(x+y)\cdot 1=\frac{1}{2}\cdot(z^2-z+1)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{8}$$

図より z の変域は $0<z<1$ なので、

S の最小値 $=\frac{3}{8}$ $\left(z=\frac{1}{2}\text{ のとき}\right)$ (ans)

◆◆

【11】（β10） $x>0$ のとき、

$f(x)=(x^2-6x+1)+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+1\right)$ の最小値と、そのときの

x の値を求めよ。

解 $f(x)=(x^2-6x+1)+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{6}{x}+1\right)$

$$=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+2$$

$$=\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}\right\}-6\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)+2$$

対称式 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ $\left(a=x\,,\ b=\frac{1}{x}\right)$

ここで $x+\frac{1}{x}=t$ とおくと、

$f(x)=(t^2-2)-6t+2=t^2-6t=(t-3)^2-9$ ……①

（$=g(t)$ とおく）

であり、$x>0$ なので、相加・相乗平均の不等式より

$t=x+\frac{1}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$ $\quad\therefore\ t\geqq 2$ ……②

$\left(\text{等号は } x=\frac{1}{x}\ \ i.e.\ \ x=1\text{ のとき}\right)$

①②より $min.g(t)=g(3)=-9$ (ans)

であり、このとき、$(t=)\,x+\frac{1}{x}=3$ より $x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (ans)

[参考] ②は $x+\frac{1}{x}=\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2$ と変形しても出て

きます。

◆◆

【12】（α10） x の関数

$f(x)=a\cdot(x^2+2x+2)^2+2a\cdot(x^2+2x+2)+b$ は最小値 6 をもち、

$f(0)=11$ である。

(1) a , b , $f(1)$ の値を求めよ。

(2) $f(x)=6$ をみたす x の値を求めよ。

解 (1) $f(x)=a\cdot(x^2+2x+2)^2+2a\cdot(x^2+2x+2)+b$

$f(0)=11$ より $8a+b=11$ ……①

さて、$t=x^2+2x+2=(x+1)^2+1$ とおくと、

t のとりうる値の範囲は $t\geqq 1$ ……②

☆置き換えたときは、変域に注意。

であり、$f(x)=at^2+2at+b=a\cdot(t+1)^2-a+b$（$=g(t)$ とおく）

②に注意して、$min.g(t)=g(1)=3a+b$

∴問題文より $3a+b=6$ ……③

①③から $a=1$, $b=3$　(ans)

$\therefore g(t)=t^2+2t+3$

$\therefore f(1)=g(5)=5^2+2\cdot5+3=38$　(ans)

(2) $f(x)=6$　$\therefore g(t)=6$　$\therefore t^2+2t+3=6$

$\therefore t^2+2t-3=0$　$\therefore (t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=1$（②に注意）

したがって $(x+1)^2+1=1$　$\therefore x=-1$　(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆