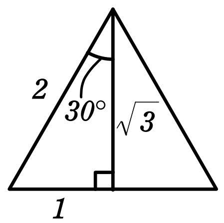
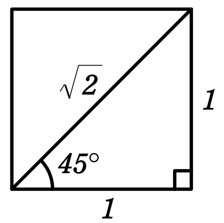
講義編　図形と計量（1）

今日から【三角比】という分野に入ります。
この分野は『形が同じであれば，大きさによらず，各部分の長さの比は一定である。』という性質（中学で学んだ相似の性質）を，より実用的な技術にまで高めたものです。
今回（1）では，[■三角比の定義]のお話をしていきます。
（プラスちょこっと [■$90°-\theta$公式]）
注）検定教科書の【図形と計量（三角比）】の章を手元において学習を進めて下さい。巻末の「三角比の表」を利用したりもします。 では，スタートです！

■三角定規（$30°$定規、$45°$定規）





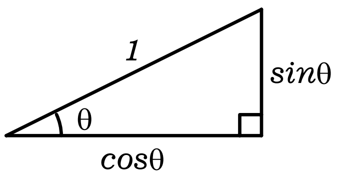
正三角形を2等分した三角形（$30°$定規）

正方形を2等分した三角形（$45°$定規）

注）[三角比]では，この$30°$定規，$45°$定規の形は頻繁に登場します。形・長さの比 をしっかりみておいて下さい。

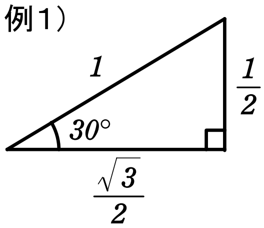
■三角比の定義

斜辺が1の直角三角形を下図のようにおいたとき，
ヨコの長さが$\cos\theta$、タテの長さが$\sin\theta$、傾きが$\tan\theta$。



$\cos\theta$……ヨコ
$\sin\theta$……タテ
$\tan\theta$……傾き

例1）

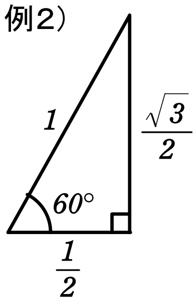


$\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30° = \dfrac{1}{2}$

$\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

例2）

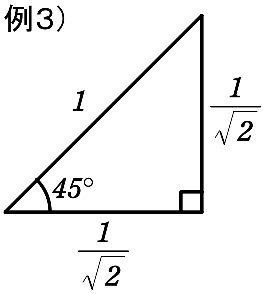


$cos60° = \frac{1}{2}$

$sin60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan60° = \sqrt{3}$

例3）



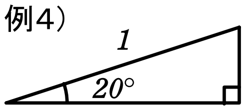
$cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$tan45° = 1$

注）例１～３ つまり $30°$，$60°$，$45°$ は慣れておく必要があります。

例4）

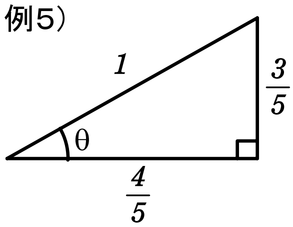


$cos20° = 0.9397$ （検定教科書巻末

$sin20° = 0.3420$ の[三角比の表]

$tan20° = 0.3640$ 参照）

例5）



$cos\theta = \frac{4}{5}$

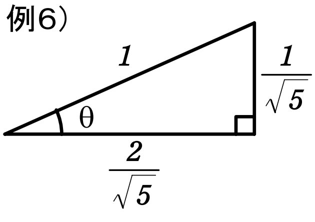
$sin\theta = \frac{3}{5}$

$tan\theta = \frac{3}{4}$

[三角比の表]を見ると，θ は $36°$~~$37°$ の間であることがわかります。

（$3:4:5$の直角三角形）

例6）



$cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

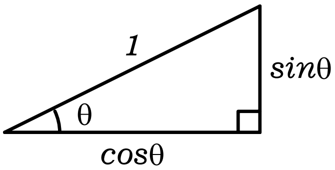
$tan\theta = \frac{1}{2}$

（$1:2:\sqrt{5}$の直角三角形）

☛このように，斜辺＝１で説明するのが，（近い将来に学ぶ）【三角関数】につながる良い見方だと思いますが，検定教科書etcでは少し説明の仕方が違います。それについてお話しして，上の例1）～例3）を検定教科書風にやってみましょう。

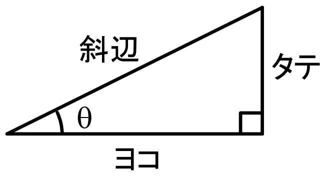
■三角比の定義　　　　　　　　　　　　　（再掲）

斜辺が1の直角三角形を下図のようにおいたとき，
ヨコの長さ$cos\theta$が、タテの長さ$sin\theta$が、傾きが$tan\theta$。



$cos\theta$……ヨコ
$sin\theta$……タテ
$tan\theta$……傾き

■三角比の定義（検定教科書風）



$cos\theta=\dfrac{\text{ヨコ}}{\text{斜辺}}$
$sin\theta=\dfrac{\text{タテ}}{\text{斜辺}}$
$tan\theta=\dfrac{\text{タテ}}{\text{ヨコ}}$

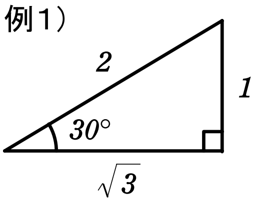
☛三角比……直角三角形の2辺の比
参考）$cos\theta$はcをかく感じ、$sin\theta$はsをかく感じ、
$tan\theta$はtをかく感じ。

注）$cos\theta$，$sin\theta$，$tan\theta$ ともに，
「角度θのみによって決まる！」（重要）
スケール（大きさ）には無関係です！

☛もちろん，どちらの定義も《内容は同じコトを言っている》んですよ！ どちらも有用性があるので，状況によって使い分けるのが上手いと思います。

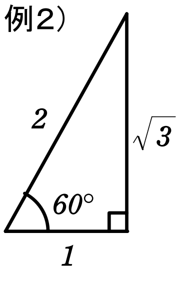
～検定教科書風～

例1）



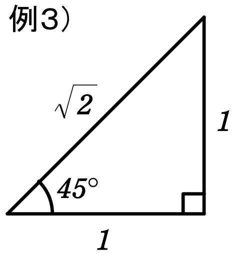
$cos30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$sin30° = \dfrac{1}{2}$
$tan30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

例2）



$cos60° = \dfrac{1}{2}$
$sin60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$tan60° = \sqrt{3}$

例3）



$\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = 1$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題 $AB=2$, $\angle ABC=135^\circ$, $\angle ACB=15^\circ$ の△ABCがある。点B，Cから直線AC，ABに下ろした垂線の足をそれぞれD，Eとするとき，次の各問に答えよ。

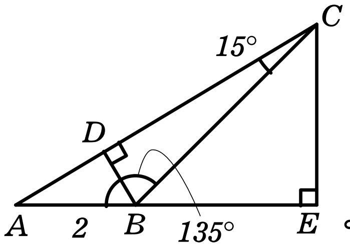
(1)AD，BDの長さをそれぞれ求めよ。

(2)BE，BC，CDの長さをそれぞれ求めよ。

(3) (1)，(2)の結果を利用して，$\cos 15^\circ$, $\sin 15^\circ$の値をそれぞれ求めよ。

解

☆三角比の問題では，三角形（とくに直角三角形）に着目するのがポイントです！



(1) △ABCに着目して，

$\angle A=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=30^\circ$

三角形の内角の和＝180°

よって△ABDは30°定規の形。（$AB=2$）

$\therefore AD=\sqrt{3}$, $BD=1$　(ans)

(2) $\angle CBE=45^\circ$ ，$\angle BCE=45^\circ$ なので，

△BCEは45°定規の形。また，△ACEは30°定規の形。

ここで，$BE=x$ とおくと

$CE=x$, $BC=\sqrt{2}x$, $AC=2x$, $CD=2x-\sqrt{3}$

$AE=2+x=\sqrt{3}x$　　$\therefore (\sqrt{3}-1)x=2$

$$\therefore x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+1 \cdots\cdots ①$$

したがって

$BE=x=\sqrt{3}+1$　(ans)

$BC=\sqrt{2}x=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

$CD=AC-AD=2x-\sqrt{3}=2(\sqrt{3}+1)-\sqrt{3}=\sqrt{3}+2$　(ans)

参考）①は次のようにしても出せます。

△BCDに三平方の定理を用いて，

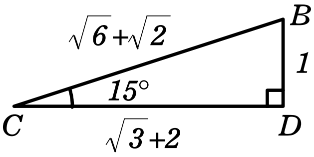
$(BC=\sqrt{2}x\,,\ BD=1\,,\ CD=2x-\sqrt{3})$

$(\sqrt{2}x)^2=1^2+(2x-\sqrt{3})^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4\sqrt{3}x+4=0 \Leftrightarrow x^2-2\sqrt{3}x+2=0$

$\Leftrightarrow x=\sqrt{3}\pm 1 \quad \therefore x=\sqrt{3}+1$ ……①（$2x-\sqrt{3}>0$ に注意）

(3) △BCDに着目して，



$\cos 15°=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$=\cdots\cdots\cdots=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (ans)

$\sin 15°=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (ans)

参考）あとで学習する『三角比の相互関係（の内，

$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$）』より

$\cos^2 15°+\sin^2 15°=1$ が成り立ちます。

実際，$\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\dfrac{8+4\sqrt{3}}{16}+\dfrac{8-4\sqrt{3}}{16}$

$=\dfrac{16}{16}=1$

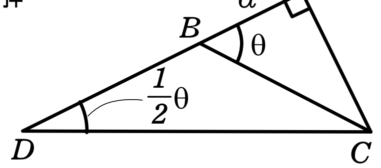
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題 $\angle BAC=90°$の直角三角形ABCにおいて，線分ABのBの方の延長上に $\angle ADC=\dfrac{1}{2}\angle ABC$ をみたすように点Dをとる。$\angle ABC=\theta\,,\ AB=a$ とおくとき，

(1)線分BC，ACの長さを $a\,,\ \theta$ を用いて表せ。

(2) $\tan\dfrac{\theta}{2}$の値を $\cos\theta\,,\ \tan\theta$ で表せ。

解



$(AB=a)$

(1) △ABCに着目して，

$\cos\theta=\dfrac{a}{BC}$

$\therefore BC=\dfrac{a}{\cos\theta}$ (ans)

$\tan\theta=\dfrac{AC}{a} \quad \therefore AC=a\tan\theta$ (ans)

(2) $\triangle ACD$見て，$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{AC}{AD}$　（ACは$a\tan\theta$）

ADは？ ⇔ BDは？

$\triangle BCD$に着目して，$\frac{1}{2}\theta+\angle BCD=\theta$　$\therefore \angle BCD=\frac{\theta}{2}$

$\therefore \triangle BCD$は二等辺三角形で $BD=(BC=)\frac{a}{\cos\theta}$

よって $AD=a+\frac{a}{\cos\theta}=a\left(1+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{a(\cos\theta+1)}{\cos\theta}$

したがって

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{AC}{AD}=a\tan\theta\times\frac{\cos\theta}{a(1+\cos\theta)}$ ……①

$=\frac{\tan\theta\times\cos\theta}{1+\cos\theta}$　(ans)

参考）あとで学習する『三角比の相互関係（の内，

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$）』を使うと，

①$=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ という変形ができます。

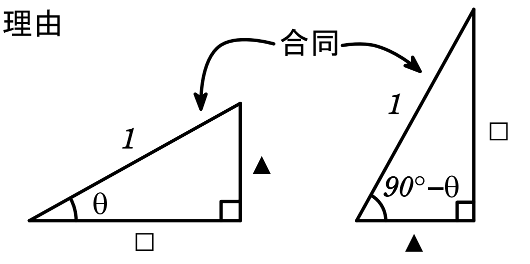
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■$90°-\theta$公式

$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$ ，$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$

$\tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$

理由



$\cos\theta=$□　　　$\cos(90°-\theta)=$▲

$\sin\theta=$▲　　　$\sin(90°-\theta)=$□

$\tan\theta=\frac{▲}{□}$　　　$\tan(90°-\theta)=\frac{□}{▲}$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題 次の三角比を$0°$から$45°$までの三角比で表せ。

(1) $\sin78°$　(2) $\cos67°$　(3) $\tan65°$

解 (1) $\sin 78^\circ = \sin(90^\circ - 12^\circ) = \cos 12^\circ$ (ans)

(2) $\cos 67^\circ = \cos(90^\circ - 23^\circ) = \sin 23^\circ$ (ans)

(3) $\tan 65^\circ = \tan(90^\circ - 25^\circ) = \dfrac{1}{\tan 25^\circ}$ (ans)

◆◆◆

例題 $\triangle ABC$の3つの内角の大きさをA, B, Cとするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\sin\dfrac{A}{2}=\cos\dfrac{B+C}{2}$　　(2) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B+C}{2}=1$

解 三角形の内角の和＝180° より

$$A+B+C=180^\circ \Leftrightarrow \frac{A+B+C}{2}=90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2}+\frac{B+C}{2}=90^\circ \Leftrightarrow \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2}$$

(1) $\cos\dfrac{B+C}{2}=\cos\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)=\sin\dfrac{A}{2}$ (fin)

(2) $\tan\dfrac{A}{2}\times\tan\dfrac{B+C}{2}=\tan\dfrac{A}{2}\times\tan\left(90^\circ-\dfrac{A}{2}\right)$

$=\tan\dfrac{A}{2}\times\dfrac{1}{\tan\dfrac{A}{2}}=1$ (fin)

◆◆◆

演習 $AB=5$, $CA=1$, $\angle C=90^\circ$の直角三角形ABCについて，次の各問に答えよ。

(1) $\cos B$, $\tan A$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 辺BCの中点をMとするとき，$\cos\angle AMC$, $\sin\angle MAB$ の値をそれぞれ求めよ。

演習 次の三角比を0°から45°までの三角比で表せ。

(1) $\sin 73^\circ$　　(2) $\cos 52^\circ$　　(3) $\tan 85^\circ$