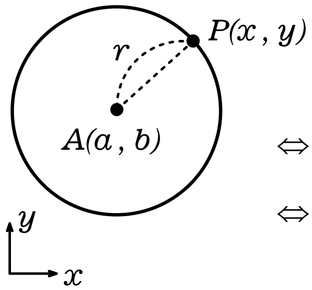
今回と次回は「円」のお話です。前のテーマ「点と直線」と同様，（円という）図形を数式で表したらどうなるか？逆に，数式を見て，『これは，どういう図形を表してるのか？という視点を持って，受講して下さいね。大切なのは，【図形】と【数式】との対応をきちんとつかむことです！

✿円の方程式✿

円…平面上で，定点からの距離が一定である点の集合
（定点から一定距離にある点の集合）
定点→中心という。 一定距離→半径という。

〔中心$A(a\,,b)$，半径r の円〕の方程式は？



x，yの関係式は？

$AP=r$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ ……（表現Ⅰ）

[円の問題]の主人公は，中心＆半径です！

（Ⅰ）を展開すると，

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$

$\therefore\ x^2+y^2+Ax+By+C=0$ ……（表現Ⅱ）

（$-2a=A$，$-2b=B$，$a^2+b^2-r^2=C$ とおいた。）

[円の表現]には，（Ⅰ）と（Ⅱ）の2種類があります。

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題 次の各問に答えよ。

（1）円 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ の中心の座標と半径を求めよ。

（2）方程式 $x^2+y^2+2ax-4y+2a^2+a=0$ が円を表すように，aの値の範囲を定めよ。

解 (1) $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ ←←←（表現Ⅱ）

$\Leftrightarrow (x^2+2x)+(y^2-4y)+1=0$

$\Leftrightarrow \{(x+1)^2-1\}+\{(y-2)^2-4\}+1=0$ ←←〈平方完成〉

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$ ←←←（表現Ⅰ）

∴ 中心は$(-1,2)$，半径は2 (ans)

中心(a,b)，半径r の円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ （表現Ⅰ）（再掲）

(2) $x^2+y^2+2ax-4y+2a^2+a=0$ が円を表すとき，

aの範囲は？

$x^2+y^2+2ax-4y+2a^2+a=0$

$\Leftrightarrow (x^2+2ax)+(y^2-4y)+2a^2+a=0$

$\Leftrightarrow \{(x+a)^2-a^2\}+\{(y-2)^2-4\}+2a^2+a=0$

$\Leftrightarrow (x+a)^2+(y-2)^2=-a^2-a+4$

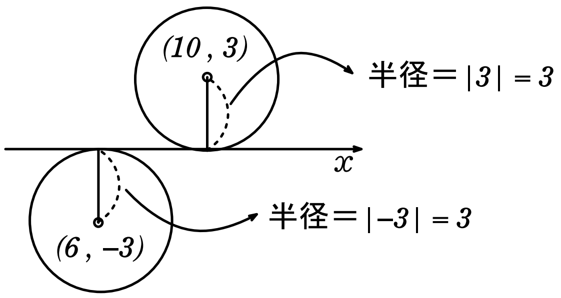
これが円を表すための条件は，$-a^2-a+4>0$

$\therefore a^2+a-4<0$ $\therefore \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}<a<\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$ (ans)

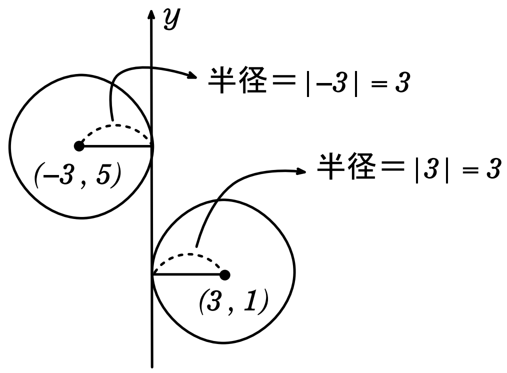
中心(a,b)，半径r の円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ （表現Ⅰ）（再掲）

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

次の例題に入る前に，ちょっとコメント



円がx軸に接する ⇔ 半径＝|中心のy座標|

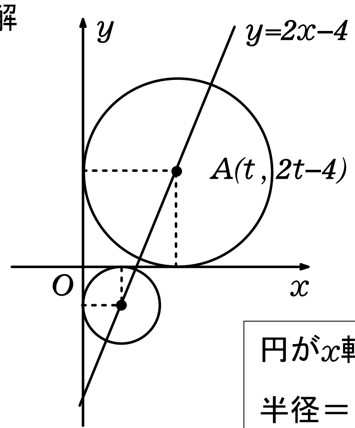


円がy軸に接する $\Leftrightarrow$ 半径＝|中心のx座標|

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題 中心が直線 $y=2x-4$ 上にあって，x軸，y軸の両方に接する円の方程式を求めよ。

解



円の主人公は
[中心]＆[半径]です。

中心が $y=2x-4$ 上にあるので，中心$A(t, 2t-4)$
とおける。……①

円がx軸，y軸に接するので，
半径＝|中心のy座標|$=|2t-4|$，
半径＝|中心のx座標|$=|t|$
…………②

②見て，$|2t-4|=|t| \quad \Leftrightarrow \quad 2t-4=t \ \text{ or } \ 2t-4=-t$

$|A|=|B| \ \Leftrightarrow \ A=B \text{ or } A=-B \ \Leftrightarrow \ A=\pm B$（復習）

$\Leftrightarrow t=4 \ \text{ or } \ t=\dfrac{4}{3}$

$t=4$ のとき，中心$A(4, 4)$，半径 $=4$

$t=\dfrac{4}{3}$ のとき，中心$A\left(\dfrac{4}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)$，半径 $=\dfrac{4}{3}$

以上より，求める円の方程式は，

$(x-4)^2+(y-4)^2=16$，$\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+\left(y+\dfrac{4}{3}\right)^2=\dfrac{16}{9}$ (ans)

中心(a, b)，半径r の円の方程式
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ （表現Ⅰ）（再掲）

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題　次の各問に答えよ。

（1）3点$A(4\,,\,-1)\,,\,B(5\,,\,-8)\,,\,C(-4\,,\,-5)$を通る円の方程式を求めよ。

（2）3直線 $x+3y+6=0$ ，$x-y+2=0$ ，$5x+3y-6=0$ で囲まれた三角形の外接円の方程式を求めよ。

解（1）求める円の方程式を $x^2+y^2+kx+\ell y+m=0$ とおく。

中心や半径が不明のときは，表現Ⅱで設定しよう。

これが，$A(4\,,\,-1)\,,\,B(5\,,\,-8)\,,\,C(-4\,,\,-5)$を通る条件は，

$$\begin{cases}17+4k-\ell+m=0\\89+5k-8\ell+m=0\\41-4k-5\ell+m=0\end{cases}\iff\begin{cases}k=-2\\\ell=10\\m=1\end{cases}$$

連立方程式を解くのは各自。

よって，求める円の方程式は $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ (ans)

（表現Ⅰに変形して，$(x-1)^2+(y+5)^2=25$ でもOK）

（2）$x+3y+6=0$　……①

$x-y+2=0$　……②

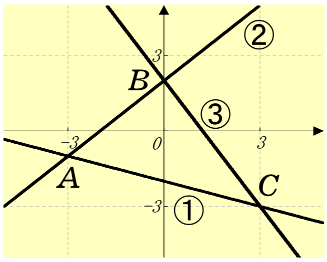
$5x+3y-6=0$　……③

とおくと，

①②の交点Aは$A(-3\,,\,-1)$

②③の交点Bは$B(0\,,\,2)$

③①の交点Cは$C(3\,,\,-3)$



$\triangle ABC$の外接円は，3点A，B，Cを通る円である。

これが，求める円です

求める円の方程式を $x^2+y^2+kx+\ell y+m=0$ とおく。

これが，$A(-3\,,\,-1)\,,\,B(0\,,\,2)\,,\,C(3\,,\,-3)$を通る条件は，

$$\begin{cases}10-3k-\ell+m=0\\4+2\ell+m=0\\18+3k-3\ell+m=0\end{cases}\iff k=-\frac{1}{2}\,,\,\ell=\frac{5}{2}\,,\,m=-9$$

連立方程式を解くのは各自。

よって，求める円の方程式は $x^2+y^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}y-9=0$ (ans)

（表現Ⅰに変形して，$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{85}{8}$ でもOK）

◆◆

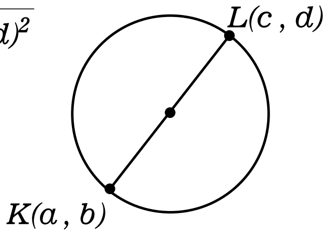
例題　2点$K(a\,,\,b)\,,\,L(c\,,\,d)$を直径の両端とする円の方程式は $(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ であることを示せ。

解 [円の問題]の主人公は，中心＆半径です。(再掲)

求める円の中心は，2点K，Lの中点で，$\left(\dfrac{a+c}{2}, \dfrac{b+d}{2}\right)$

半径は，$\dfrac{1}{2}KL=\dfrac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

したがって，この円の方程式は



$$\left(x-\frac{a+c}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b+d}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\{(a-c)^2+(b-d)^2\}$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+c)x+y^2-(b+d)y+\frac{1}{4}\{(a+c)^2+(b+d)^2\}$$

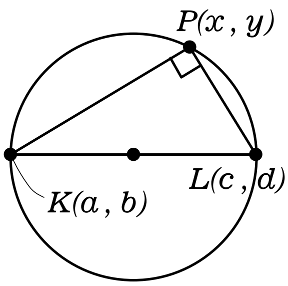
$$=\frac{1}{4}\{(a-c)^2+(b-d)^2\}$$

$$\Leftrightarrow x^2-(a+c)x+y^2-(b+d)y+ac+bd=0$$

$$\Leftrightarrow\{x^2-(a+c)x+ac\}+\{y^2-(b+d)y+bd\}=0$$

$$\Leftrightarrow(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0 \quad (fin)$$

別解



求める円周上の点を$P(x, y)$

とおいて，

xとyの関係式は？

と考えましょう。

$KP\perp LP$ より，〈KPの傾き〉×〈LPの傾き〉＝－1

$$\therefore\frac{y-b}{x-a}\times\frac{y-d}{x-c}=-1 \quad \therefore(y-b)(y-d)=-(x-a)(x-c)$$

$$\therefore (x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0 \quad (fin)$$

注）分母(0になっちゃダメ)のことを気にしないで書きました。今はとりあえず，大雑把な理解でOKです。

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

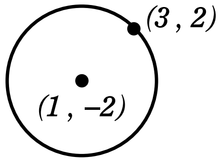
例題 次の円の方程式を求めよ。

(1)中心が点$(1, -2)$で，点$(3, 2)$を通る円。

(2)点$(1, 2)$を通り，x軸・y軸に接する円。

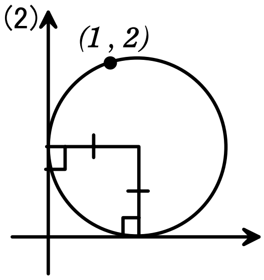
(3)直径の両端が2点$(1, 2)$，$(3, -2)$である円。

解 (1)



半径$r=\sqrt{(3-1)^2+\{2-(-2)\}^2}$
$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
なので，求める円の方程式は，
$(x-1)^2+(y+2)^2=20$ (ans)

(2)



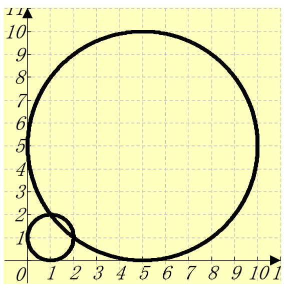
求める円の半径をrとおくと，

$\begin{cases} x\text{軸}\&y\text{軸に接する} & \cdots\cdots① \\ \text{点}(1,2)\text{を通る} & \cdots\cdots② \end{cases}$

より，中心は(r, r) ←←図参照。
とかける。

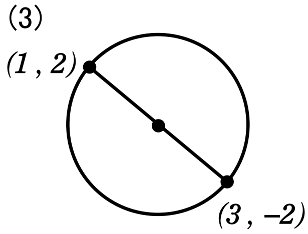
よって，求める円は $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$ とかける。

②より，$(1-r)^2+(2-r)^2=r^2 \Leftrightarrow r^2-6r+5=0$
$\Leftrightarrow (r-1)(r-5)=0 \Leftrightarrow r=1, 5$



以上より，答えは
$(x-1)^2+(y-1)^2=1$
$(x-5)^2+(y-5)^2=25$ (ans)

(3)



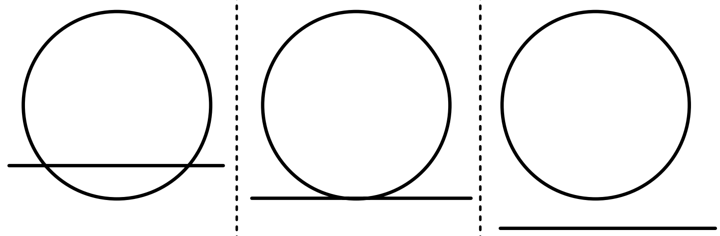
求める円の方程式は，
$(x-1)(x-3)+(y-2)\{y-(-2)\}=0$
$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-1=0$ (ans)

参考）もちろん，「まず中心と半径を出して……」
とやってもOKです。

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

❂さて，ここまでは[円の方程式]について，基本的理解をしてきましたね。ここからは，《円と直線の位置関係》についてのお話です。

✿円と直線の位置関係✿ ……3種類ありますね。



(ア)2点で交わる	(イ)接する	(ウ)離れている
【共有点2個】	【共有点1個】	【共有点0個】

✻円と直線の位置関係を,《数式で》調べる方法は,
次の2つがあります。

(ⅰ)[円の方程式]と[直線の方程式]を連立して,2次方程式をつくり,

実数解が2個(判別式$D>0$) ⇔ 2点で交わる(ア)

実数解が1個〈重解〉(判別式$D=0$) ⇔ 接する(イ)

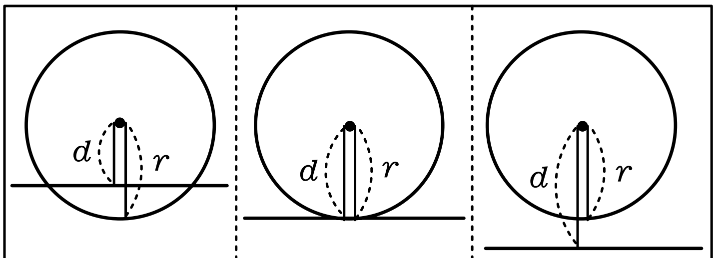
実数解が0個(判別式$D<0$) ⇔ 離れている(ウ)

〔高1でやった,放物線と直線の位置関係 と同様です〕

という関係を利用する。

(ⅱ)d=[円の中心と,直線との距離]、r=半径
とおいたとき,d と r の大小関係に着目する。

注)dは,『点と直線の距離公式』で求まるね。



$d<r$	$d=r$	$d>r$
(ア)2点で交わる	(イ)接する	(ウ)離れている
【共有点2個】	【共有点1個】	【共有点0個】

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題　次の直線と円の位置関係を定数aの値によって分類せよ。

$y=x+a$ ……①　,　$x^2+y^2-2x=0$ ………②

解　①②を連立すると，$x^2+(x+a)^2-2x=0$

$\therefore 2x^2+2(a-1)x+a^2=0$ ………③

③の判別式をDとおくと，$D=\{2(a-1)\}^2-4\cdot 2\cdot a^2$

①②が異なる2点で交わる$\Leftrightarrow D>0$

$\Leftrightarrow \{2(a-1)\}^2-4\cdot 2\cdot a^2>0 \Leftrightarrow (a-1)^2-2a^2>0$

$\Leftrightarrow a^2+2a-1<0 \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$

①②が接する$\Leftrightarrow D=0$

$\Leftrightarrow \{2(a-1)\}^2-4\cdot 2\cdot a^2=0 \Leftrightarrow (a-1)^2-2a^2=0$

$\Leftrightarrow a^2+2a-1=0 \Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{2}$

①②が共有点をもたない$\Leftrightarrow D<0$

$\Leftrightarrow \{2(a-1)\}^2-4\cdot 2\cdot a^2<0 \Leftrightarrow (a-1)^2-2a^2<0$

$\Leftrightarrow a^2+2a-1>0 \Leftrightarrow a<-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}<a$

以上をまとめて，

$-1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$ のとき，異なる2点で交わる。

$a=-1\pm\sqrt{2}$　　　のとき，接する。

$a<-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}<a$のとき，共有点をもたない。(答)

別解（dとrの大小関係を使って，解いてみましょう。）

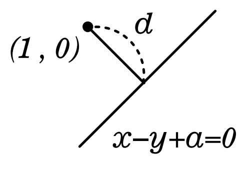
$y=x+a$……①　,　$x^2+y^2-2x=0$ ……②

①$\Leftrightarrow x-y+a=0$

②$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$　《中心$(1,0)$，半径$r=1$》なので，

[中心と直線①との距離]を d とおくと，

$$d=\frac{|1-0+a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|a+1|}{\sqrt{2}}$$



したがって，

①②が異なる2点で交わる$\Leftrightarrow d<r \Leftrightarrow \dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}<1$

$\Leftrightarrow |a+1|<\sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2}<a+1<\sqrt{2} \Leftrightarrow -1-\sqrt{2}<a<-1+\sqrt{2}$

①②が接する $\Leftrightarrow d=r \Leftrightarrow \dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}=1$

$\Leftrightarrow |a+1|=\sqrt{2} \Leftrightarrow a+1=\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow a=-1\pm\sqrt{2}$

①②が共有点をもたない $\Leftrightarrow d>r \Leftrightarrow \dfrac{|a+1|}{\sqrt{2}}>1$

$\Leftrightarrow |a+1|>\sqrt{2} \Leftrightarrow a+1<-\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{2}<a+1$

$\Leftrightarrow a<-1-\sqrt{2}\ ,\ -1+\sqrt{2}<a$　　　　（以下略）

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題　直線 $y=mx-2m$……① と円 $x^2+y^2=1$……②について，次の各問に答えよ。

(1)直線①と円②が異なる2点で交わるとき，mのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)(1)の下で，直線①と円②の2つの交点をA，Bとする。線分ABの長さが$\sqrt{2}$となるように，mの値を定めよ。

解（1） $y=mx-2m \Leftrightarrow mx-y-2m=0$ ……①

$x^2+y^2=1$……② 〔中心$(0\ ,\ 0)$，半径$r=1$〕

[円②の中心 と 直線①とのキョリ]=d とおくと，

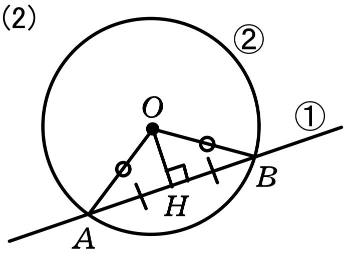
$d=\dfrac{|-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}$ ……（ア）

円②と直線①が異なる2点で交わる条件は，

$d<r \Leftrightarrow \dfrac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}<1 \Leftrightarrow |2m|<\sqrt{m^2+1}$

$\Leftrightarrow 4m^2<m^2+1 \Leftrightarrow m^2<\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{\sqrt{3}}<m<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　(ans)

(2)



問題文（$AB=\sqrt{2}$）より

$AH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

左図の直角三角形OAHに着目すると，

（図のように点Hをおく。）

$OA^2=OH^2+AH^2 \Leftrightarrow 1^2=OH^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow OH^2=\dfrac{1}{2}\quad \therefore OH=\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ……（イ）

（ア），（イ）より

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}\,|2m|=\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow 8m^2=m^2+1 \Leftrightarrow m^2=\frac{1}{7} \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{\sqrt{7}} \quad (ans)$$

このように

☆弦の長さ（円と直線が2点で交わる場合）
　直角三角形に着目して，三平方の定理〔原則〕

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

☆定点通過　（例：）

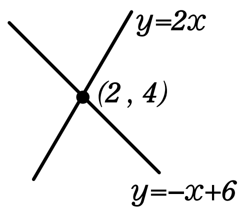
直線 $(2a+1)x+(1-a)y-6=0$

　（aの値によって，いろんな直線になる。）

$\Leftrightarrow (x+y-6)+a(2x-y)=0$ ……①

に対して，$\begin{cases} x+y-6=0 & \cdots\cdots② \\ 2x-y=0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$

を考える。



①は（必ず），②③の交点$(2\,,\,4)$を通る！

《定点通過》

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題　xy平面上の円 $x^2+y^2-4x+(2-a)y+a-3=0$ …①はaの値に関わらず，異なる2定点を通る。この2定点をA，Bとするとき，次の各問に答えよ。ただし，$a>0$，

[点Aのx座標]＜[点Bのx座標]とする。

(1)2点A，Bの座標を求めよ。

(2)円①の半径が$2\sqrt{2}$となるように，aの値を定めよ。

(3)(2)の下で，円①と直線ABによって囲まれる図形（中心を含む方）の面積を求めよ。

解(1)

円 $x^2+y^2-4x+(2-a)y+a-3=0$ ……①

　$\Leftrightarrow (x^2+y^2-4x+2y-3)+a(1-y)=0$ ……①

に対し，

$\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-3=0 & \cdots\cdots②（円） \\ 1-y=0 & \cdots\cdots③（直線） \end{cases}$ を考える。

①は（必ず），②③の交点$(0\,,\,1)$，$(4\,,\,1)$ を通る！

参考）連立方程式②③の解き方

③より$y=1$　これを②に代入して，$x^2-4x=0$

$\Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0, 4$

よって $(x, y)=(0, 1), (4, 1)$

したがって，求める定点は $A(0, 1), B(4, 1)$ (ans)

(2)

①$\Leftrightarrow (x-2)^2+\left(y-\dfrac{a-2}{2}\right)^2=\dfrac{a^2-8a+32}{4}$ ……①’

（x，yそれぞれについて平方完成した。）

《ここで，$a^2-8a+32=(a-4)^2+16>0$ $(All.a)$ に注意。》

よって①の半径は$\sqrt{\dfrac{a^2-8a+32}{4}}$

問題文より，これが$2\sqrt{2}$に等しいので，

$\sqrt{\dfrac{a^2-8a+32}{4}}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow \dfrac{a^2-8a+32}{4}=8$

$\Leftrightarrow a^2-8a=0 \Leftrightarrow a(a-8)=0 \Leftrightarrow a=0, 8$

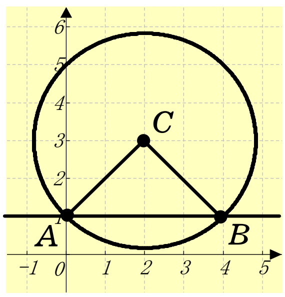
$\therefore a=8(>0)$ (ans)

(3) $a=8$のとき

円①の中心Cは（①’見て）$\left(2, \dfrac{8-2}{2}\right)$ $\therefore C(2, 3)$

半径は（問題文(2)見て）$2\sqrt{2}$

求める面積は，図の斜線部。



$(A(0, 1), B(4, 1))$

（未完成図）

$CA=CB=2\sqrt{2}$（半径）

$AB=4$

より，$\triangle ABC$は，$45°$定木の形。

$(\therefore \angle ACB=90°)$

よって，求める面積は，

〔大きい扇形CAB〕＋〔$\triangle ABC$〕

$=\pi\times(2\sqrt{2})^2\times\dfrac{270°}{360°}+\dfrac{1}{2}(2\sqrt{2})^2$

$=6\pi+4$ (ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

演習 次の各問に答えよ。

(1) xy 平面上の3点 $(4, 2), (5, 1), (6, -2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) xy 平面上の2点 $(-2, 5), (4, -1)$ が直径の両端である円の方程式を求めよ。

(3) 中心が直線 $2x-y+3=0$ 上にあって，x 軸・y 軸にともに接する円の方程式を求めよ。