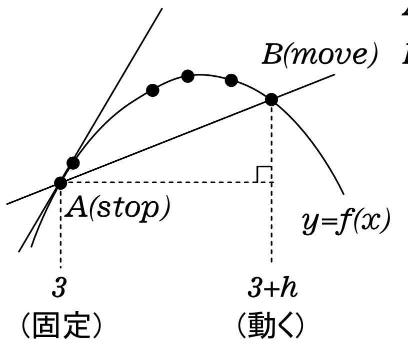
講義編	微分法（1）

今回から「微分法」に入っていきます。
理文共通範囲の微分積分については、予備知識（前提）とします。
今回（1）の主なテーマは【微分係数（右側，左側含む）】・【微分可能と連続】・【導関数（定義）】・【積，商の微分公式】・【合成関数の微分公式】です。

■平均変化率 と 微分係数ーーここからーー（復習）ーー

1



$A(3\,,f(3))$

$B(3+h\,,f(3+h))$

直線ABの傾き

$$=\frac{f(3+h)-f(3)}{(3+h)-3}$$

$$=\boxed{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}}$$

$x=3$から$x=3+h$までの，関数$y=f(x)$の平均変化率

2

ここで，hを限りなく0に近づけると，点Bは限りなく点Aに近づく。 そして，

$$\lim_{h\to 0}(\text{直線}AB\text{の傾き})=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

を，「関数$y=f(x)$の，$x=3$における微分係数」 または
「関数$y=f(x)$の，$x=3$における接線の傾き」 といい，
$f'(3)$ で表す。
（注　極限値が存在するときの話。）

まとめると，

$$\lim_{h\to 0}(\text{直線}AB\text{の傾き})=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$

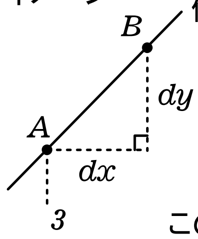
=「関数$y=f(x)$の，$x=3$における微分係数」
=「関数$y=f(x)$の，$x=3$における接線の傾き」

注）図で，$3+h=x$ とかくと，

$\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ と書きかえることもできますね。

3

イメージ



傾き$f'(3)$　曲線$y=f(x)$上の点$A(x=3)$の近傍をどんどん拡大していくと……

→→直線が見えてきますね!!

この直線を「$y=f(x)$の，$x=3$における接線」と呼ぶわけです。

dx……xの微分（微小増加分）
dy……yの微分（微小増加分）

$\dfrac{dy}{dx}=f'(3)$　　$\therefore dy=f'(3)dx$

（ただし，$x=3$の近傍で）

この式を見ると，「微分係数」という名前も納得ですね。

4

さて，上の説明で，《3の代わりに文字aを使う》と，

関数$y=f(x)$の，$x=a$における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\quad\left(=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

（関数$y=f(x)$の，$x=a$における接線の傾き）

注）この極限値 $f'(a)$ が存在するとき，

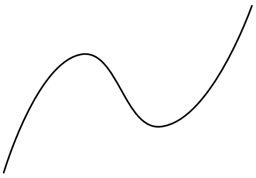
$f(x)$は$x=a$において微分可能であるという。

■平均変化率 と 微分係数ーーここまでーー（復習）ーー

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■右側微分係数＆左側微分係数

$\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ， $\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき，



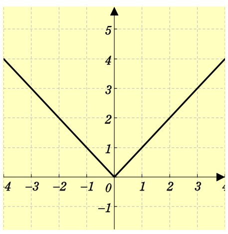
この極限値をそれぞれ，$f(x)$ の $x=a$ における「右側微分係数」，「左側微分係数」という。

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能である $\left(f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right.$ が存在する$\left.\right)$ ための必要十分条件は，$f(x)$ の $x=a$ における右側微分係数 $\left(\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ と左側微分係数 $\left(\displaystyle\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$ がともに存在して，かつその値が等しいことである。

[例] $f(x)=|x|$ について。

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1$$

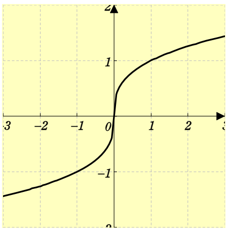
$$\lim_{h\to-0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1$$ より



$x=0$ における右側微分係数，左側微分係数がともに存在するが、その値が等しくないから、$f(x)$ は $x=0$ で微分可能でない。（$f'(0)$は存在しない。）

[参考] 定性的に言うと，微分可能とは，グラフが「ツナガッテイテ」（これを連続という），「ナメラカ」なことである。
（ex. $y=|x|$ のグラフは，$x=0$ でナメラカでない。）

注）ただし，「ナメラカ」なのに微分可能でないこともある。



$f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ $(=\sqrt[3]{x})$ のとき，

$f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ であり，$x=0$ で微分可能でないが，グラフは「ツナガッテイテ」（連続）、「ナメラカ」である。

《接線が y 軸に平行なとき、このようなことがおきる。》

■微分可能と連続

関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば、

$f(x)$ は $x=a$ で連続である。

注）この定理の逆は成り立たない。（$ex.\ y=|x|\ (x=0)$）

理由（証明）

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能（$i.e.\ f'(a)$が存在する）ならば

$$\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)\right\}$$

$=f'(a)\cdot 0=0$　　よって $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

すなわち $f(x)$ は $x=a$ で連続である。 (fin)

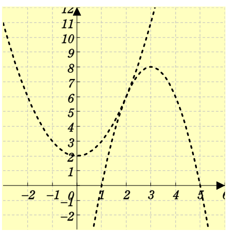
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題1 関数 $f(x)=\begin{cases}x^2+2 & (x\leqq 2)\\ -2x^2+ax+b & (x>2)\end{cases}$ が $x=2$ で微分可能であるとき、定数 a , b の値を求めよ。

解　まず，微分可能であるためには、連続であることが必要なので $\displaystyle\lim_{x\to 2+0}f(x)=\lim_{x\to 2-0}f(x)=f(2)$

$\Leftrightarrow 2a+b-8=6=6$　$\Leftrightarrow$　$2a+b=14$ ……①

①の下で，（$x=2$で）微分可能であるための条件は



《右側微分係数》＝《左側微分係数》

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to +0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to -0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

注）左辺（の$f(2+h)$）に$f(x)=-2x^2+ax+b$，

右辺（の$f(2+h)$）に$f(x)=x^2+2$　を適用して極限計算

をしてもよいのだが，次のようにする方がラク。

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2+0} f'(x) = \lim_{x\to 2-0} f'(x)$

左辺では $2<x$ なので $f(x)=-2x^2+ax+b$ より

$f'(x)=-4x+a$

右辺では $x<2$ なので $f(x)=x^2+2$ より $f'(x)=2x$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to 2+0}(-4x+a) = \lim_{x\to 2-0}(2x)$

$\Leftrightarrow$ $a-8=4$　$\Leftrightarrow$　$a=12$ ……②

①②より $a=12$，$b=-10$　(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■導関数　（復習）

aの値を１つ決めると，$f'(a)$ の値が唯１つ決まる。

つまり，「$f'(a)$は，aの関数」なので

aの代わりに x とかくと，新しい関数 $f'(x)$が得られる。

これを $y=f(x)$ の導関数といい，

$f'(x)$　，　y'　，　$\dfrac{dy}{dx}$　，　$\dfrac{d}{dx}f(x)$　などと表す。

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\quad \text{（導関数の定義）}}$$

注）$f(x)$が与えられたとき，「$f'(x)$を求める」ことを，

「$f(x)$を微分する」という。

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題２　関数 $f(x)=\sqrt{x}$ を（導関数の定義を用いて）

微分せよ。

解

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (ans)$$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■線型性・線形性（証明は略）（復習）

・$\{ c\cdot f(x)\}' = c\cdot f'(x)$ （cは定数）

・$\{ f(x)+g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$

■積の微分公式

$$\{ f(x)\cdot g(x)\}' = f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

理由（証明）

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \ , \ \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = g'(x)$$

であることに注意して、

$$\{ f(x)\cdot g(x)\}' = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot g(x+h) + f(x)\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}$$

$$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \qquad (fin)$$

■商の微分公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{ g(x)\}^2}$$

理由（証明）

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \left\{f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right\}' = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\cdot\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' \cdots ①$$

ここで $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{g(x+h)g(x)}\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\frac{-1}{\{g(x)\}^2}\cdot g'(x)=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$ であるので

$$① = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left[-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right]$$

$$=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2} \qquad (fin)$$

◆◆◆

例題3 次の関数を（xで）微分せよ。

(1) $y=(3x-7)(2x^2+x-4)$　　(2) $y=(x^3+1)^2$

(3) $y=ax(bx+1)(cx-1)$　（a , b , cは定数）

解 (1) $\left\{(3x-7)(2x^2+x-4)\right\}'$

$=(3x-7)'\cdot(2x^2+x-4)+(3x-7)\cdot(2x^2+x-4)'$

$=3(2x^2+x-4)+(3x-7)(4x+1)=18x^2-22x-19$　(ans)

(2) $\left\{(x^3+1)^2\right\}'=\left\{(x^3+1)(x^3+1)\right\}'$

$=(x^3+1)'\cdot(x^3+1)+(x^3+1)\cdot(x^3+1)'=2(x^3+1)\cdot(x^3+1)'$

$=2\cdot(x^3+1)\cdot 3x^2=6x^2(x^3+1)$　(ans)

参考）今回後で学ぶ「合成関数の微分公式」を用いると

一気に $\left\{(x^3+1)^2\right\}'=2(x^3+1)\cdot(x^3+1)'$ と計算できます。

(3) $\{ax(bx+1)(cx-1)\}'=\left\{(abx^2+ax)\cdot(cx-1)\right\}'$

$=(abx^2+ax)'\cdot(cx-1)+(abx^2+ax)\cdot(cx-1)'$

$=(2abx+a)\cdot(cx-1)+(abx^2+ax)\cdot c$

$=3abc\cdot x^2-2a(b-c)\cdot x-a$　(ans)

参考）もちろん「展開してから微分」してもOKです。

◆◆◆

例題4 次の関数を（xで）微分せよ。

(1) $y=\dfrac{1}{(x+3)^2}$　　(2) $y=\dfrac{3x^2-6x+1}{x^2+1}$

解 (1) $\left\{\dfrac{1}{(x+3)^2}\right\}'=\dfrac{0\cdot(x+3)^2-1\cdot\left\{(x+3)^2\right\}'}{\left\{(x+3)^2\right\}^2}$

$=\dfrac{-2(x+3)}{(x+3)^4}=\dfrac{-2}{(x+3)^3}$　(ans)

(2) $\left\{\dfrac{3x^2-6x+1}{x^2+1}\right\}' = \dfrac{(3x^2-6x+1)'(x^2+1)-(3x^2-6x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$

$= \dfrac{(6x-6)\cdot(x^2+1)-(3x^2-6x+1)\cdot(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{6x^2+4x-6}{(x^2+1)^2}$ (ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■合成関数の微分公式

$\begin{cases} y=f(u) \\ u=g(x) \end{cases}$ のとき　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$（分数のように扱える!!）

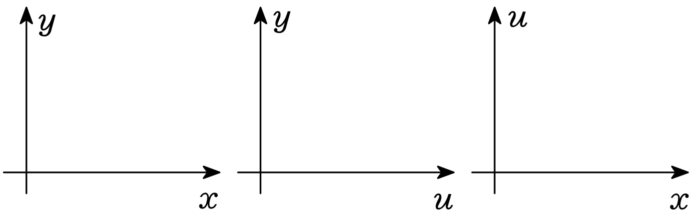
[イメージ] $x \xrightarrow{\quad g \quad} u \xrightarrow{\quad f \quad} y$

注）$\dfrac{dy}{dx}$ = [xy平面における接線の傾き]

$\dfrac{dy}{du}$ = [uy平面における接線の傾き]

$\dfrac{du}{dx}$ = [xu平面における接線の傾き] であることに注意

すると、$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ を直感的に理解できるでしょう。



注）$\dfrac{dy}{dx}$，$\int$ などは ライプニッツ（*Gottfried Wilhelm Leibniz*，*1646–1716*）の考え出した記号である。
彼はつねづね「適切な記号は思考を助ける」と言っていて，微積分におけるこの記号化は，彼の傑作といえるだろう。

注）「導関数の定義」からの説明は省略する。

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

例題5　次の関数を（xで）微分せよ。

(1) $y=(5x^2-3)^4$　　　(2) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3$

解

(1) $y=(5x^2-3)^4 \iff \begin{cases} y=u^4 \\ u=5x^2-3 \end{cases}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=4u^3\times 10x=4(5x^2-3)^3\times 10x$$

$$=40x(5x^2-3)^3 \quad (ans)$$

参考）慣れてきたら，いちいち置き換えずに

$\boxed{(\square^n)'=n\cdot\square^{n-1}\cdot\square'}$ という感じで計算すればよろしい。

(2) $y=\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^3 \iff \begin{cases} y=u^3 \\ u=\dfrac{x}{x+1} \end{cases}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\times\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$=3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\times\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{3x^2}{(x+1)^4} \quad (ans)$$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■逆関数の微分公式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$ （分数のように扱える）

■媒介変数（パラメータ）で表された曲線の微分公式

$x=f(t)$, $y=g(t)$ のとき

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \left(\frac{dx}{dt}\neq 0\text{のとき}\right)$$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【◇…スタンダード、◇◇…ハイレベル】

演習１ （◇）次の関数を（xで）微分せよ。

(1) $y=(3x^2+3x-1)(2x^2+2x+3)$

(2) $y=(2x^3+x+1)^2$　　(3) $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

演習２ （◇）$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x \leqq 1) \\ -2x^2+ax+b & (x>1) \end{cases}$ について、

$f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるように，定数a，b の値を定めよ。