今回（1）のテーマは『整式の計算』です。

■整式

数と文字の積で表される式を「単項式」といい、
いくつかの単項式の和（や差）で表される式を「多項式」という。
単項式と多項式を合わせて「整式」という。

例

単項式… $3a^2b$，$-7xy^3$ など

多項式… $2ac^3+5b+4$，$3x^2y+(-7xy^3)$ など
〔$=3x^2y-7xy^3$〕

■整式の和・差の計算

……同類項をまとめると、よりシンプルな式になる。

例

・$(3a+2b)+(4a-5b)=(3a+4a)+(2b-5b)$
$=(3+4)\cdot a+(2-5)\cdot b = 7a+(-3b) = 7a-3b$

・$\left(-2x^2+3x+1\right)-\left(-3x^2+x-2\right)$
$=-2x^2+3x+1+3x^2-x+2$
$=(-2+3)\cdot x^2+(3-1)\cdot x+(1+2) = x^2+2x+3$

■整式の積の計算

……**分配法則**による″展開″が基本

$$\begin{cases} A\cdot(B+C)=AB+AC \\ (A+B)\cdot C=AC+BC \end{cases}$$

◆◆

【例題1】 2つの整式 $A=x-2$，$B=2x^2-3x+1$ に対して、$A+B$，$A-B$，AB をそれぞれ求めよ。

解　$A+B=(x-2)+\left(2x^2-3x+1\right)$

$=2x^2+(1-3)\cdot x+(-2+1)\ =\ 2x^2-2x-1$　　(ans)

$A-B=(x-2)-\left(2x^2-3x+1\right)$

$=x-2-2x^2+3x-1\ =\ -2x^2+(1+3)\cdot x+(-2-1)$

$=-2x^2+4x-3$　　(ans)

$AB=(x-2)\left(2x^2-3x+1\right)$　　[←← $(x-2)B$]

$=x\left(2x^2-3x+1\right)-2\left(2x^2-3x+1\right)$

[←← $xB-2B$]

$=2x^3-3x^2+x-4x^2+6x-2$

$=2x^3+(-3-4)\cdot x^2+(1+6)\cdot x-2$

$=2x^3-7x^2+7x-2$　　(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■展開の公式　［根本は、**分配法則**ですよ］

《1》$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$　，　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

《2》$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

《3》$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)\cdot x+ab$

《4》$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)\cdot x+bd$

《5》$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

《6》$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

《7》$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

もう少し詳しく書いておきますね。

《1》$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)$

$=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$ ……（※）

$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a(a-b)-b(a-b)$

$=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$

［（※）を使うと

$$(a-b)^2 = \{a + (-b)\}^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$
］

《2》 $(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b) = a^2 - ab + ab - b^2$

$$= a^2 - b^2$$

《3》 $(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b) = x^2 + bx + ax + ab$

$$= x^2 + (a+b)\cdot x + ab$$

《4》 $(ax+b)(cx+d) = ax(cx+d) + b(cx+d)$

$$= acx^2 + adx + bcx + bd = acx^2 + (ad+bc)\cdot x + bd$$

《5》 $(a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c)$

$$= a(a+b+c) + b(a+b+c) + c(a+b+c)$$
$$= a^2 + ab + ca + ab + b^2 + bc + ca + bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

《6》 $(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$

$$= a^2(a+b) + 2ab(a+b) + b^2(a+b)$$
$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$ ……（※※）

$$(a-b)^3 = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$$
$$= a^2(a-b) - 2ab(a-b) + b^2(a-b)$$
$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

［（※※）を使うと

$$(a-b)^3 = \{a + (-b)\}^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$$
$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
］

《7》 $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2) + b(a^2-ab+b^2)$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

［（※※※）を使って（上式を）導くこともできます。］

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)$

$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$ …（※※※）

◆◆

【例題２】 次の式を展開せよ。

(1) $(x+2y-3)^2$　　(2) $(3x+y+5)(3x-y+5)$

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$

(4) $(-2x+1)^3$　　(5) $(x-2)(x^2+2x+4)$

> 根本は**分配法則**ですが、展開の公式を使うと
> スッキリ計算できます。

解　(1) $(x+2y-3)^2 = \{(x+2y)-3\}^2$　（$A = x+2y$ とおくと）

$= (A-3)^2 = A^2 - 2\cdot A\cdot 3 + 3^2 = A^2 - 6A + 9$

$= (x+2y)^2 - 6(x+2y) + 9$

$= x^2 + 2\cdot x\cdot 2y + (2y)^2 - 6x - 12y + 9$

$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9$　(ans)

［注：$(2y)^2 = (2y)\cdot(2y) = 4y^2$］

[別解(1)] $(x+2y-3)^2 = \{x + 2y + (-3)\}^2$

$= x^2 + (2y)^2 + (-3)^2 + 2\cdot x\cdot 2y + 2\cdot 2y\cdot(-3) + 2\cdot(-3)\cdot x$

$= x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy - 12y - 6x$

$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 12y + 9$　(ans)

(2) $(3x+y+5)(3x-y+5) = \{(3x+5)+y\}\{(3x+5)-y\}$

$= (3x+5)^2 - y^2$

$= (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 5 + 5^2 - y^2 = 9x^2 + 30x + 25 - y^2$　(ans)

［注：$(3x)^2 = (3x)\cdot(3x) = 9x^2$］

(3) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = \{(x+1)(x+4)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$= \{x^2 + (1+4)\cdot x + 4\}\{x^2 + (2+3)\cdot x + 6\}$

$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$= \{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\}$　　（$A = x^2+5x$ とおくと）

$= (A+4)(A+6) = A^2 + (4+6)A + 24$

$= A^2 + 10A + 24 = (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) + 24$

$= (x^2)^2 + 2\cdot x^2\cdot 5x + (5x)^2 + 10x^2 + 50x + 24$

$= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24$

［注：$(x^2)^2 = x^2\cdot x^2 = x^4$ ，$(5x)^2 = (5x)\cdot(5x) = 25x^2$］

$= x^4 + 10x^3 + (25+10)\cdot x^2 + 50x + 24$

$= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$　　(ans)

(4) $(-2x+1)^3 = (-2x)^3 + 3\cdot(-2x)^2\cdot 1 + 3\cdot(-2x)\cdot 1^2 + 1^3$

$= -8x^3 + 12x^2 - 6x + 1$　　(ans)

［注：$(-2x)^3 = (-2x)\cdot(-2x)\cdot(-2x) = -8x^3$
　　$(-2x)^2 = (-2x)\cdot(-2x) = 4x^2$］

(5) $(x-2)(x^2+2x+4) = (x-2)(x^2 + x\cdot 2 + 2^2)$

$= x^3 - 2^3 = x^3 - 8$　　(ans)

◆◆◆

演習1 $A = 3x^2-4x+5$ ，$B = 5x^2+2x-3$ のとき、
次の計算をせよ。

(1) $A+B$　　(2) $A-B$　　(3) $3A-2B$

演習2 次の式を展開せよ。

(1) $(x^2-3x+2)(2x+3)$　　(2) $(2x+3y)(5x-y)$

(3) $(x-2)^3$　　(4) $(x-1+2y)(x-2y-1)$

◆◆◆

――演習問題の解答――――――――――――――――――――

演習１ $A = 3x^2-4x+5$, $B = 5x^2+2x-3$ のとき、

次の計算をせよ。

(1) $A+B$　　(2) $A-B$　　(3) $3A-2B$

解　(1) $A+B = (3x^2 -4x +5) + (5x^2 +2x -3)$

$= 8x^2 -2x +2$　(ans)

(2) $A-B = (3x^2 -4x +5) - (5x^2 +2x -3)$

$= 3x^2 -4x +5 -5x^2 -2x +3 = -2x^2 -6x +8$　(ans)

(3) $3A-2B = 3(3x^2 -4x +5) - 2(5x^2 +2x -3)$

$= 9x^2 -12x +15 -10x^2 -4x +6$

$= -x^2 -16x +21$　(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

演習２ 次の式を展開せよ。

(1) $(x^2-3x+2)(2x+3)$　　(2) $(2x+3y)(5x-y)$

(3) $(x-2)^3$　　(4) $(x-1+2y)(x-2y-1)$

解　(1) $(x^2 -3x +2)(2x +3)$　（$A = x^2-3x+2$ とおくと）

$= A(2x +3) = 2xA +3A$

$= 2x(x^2 -3x +2) + 3(x^2 -3x +2)$

$= 2x^3 -6x^2 +4x +3x^2 -9x +6$

$= 2x^3 +(-6+3)\cdot x^2 +(4-9)\cdot x +6 = 2x^3 -3x^2 -5x +6$　(ans)

(2) $(2x +3y)(5x -y) = 2x(5x -y) + 3y(5x -y)$

$= 10x^2 -2xy +15xy -3y^2 = 10x^2 +13xy -3y^2$　(ans)

(3) $(x-2)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2 + 3\cdot x\cdot 2^2 - 2^3$

$= x^3 -6x^2 +12x -8$　(ans)

(4) $(x-1+2y)(x-2y-1) = \{(x-1) +2y\}\{(x-1) -2y\}$

$= (x-1)^2 - (2y)^2 = x^2 -2\cdot x\cdot 1 +1^2 -4y^2 = x^2 -2x +1 -4y^2$

(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆