初歩講座	平面ベクトル（1）

今回（1）のテーマは《導入、和、実数倍、分点公式》です。

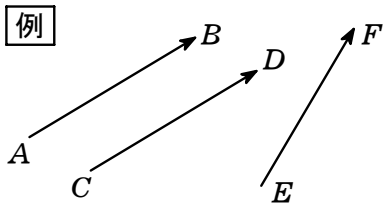
■ベクトルとは　*1*

☞有向線分…線分に「向き」をつけたもの。
「始点」と「向き」と「大きさ（長さ）」で決まる。

☞ベクトル…「向き」と「大きさ（長さ）」が同じである（2つの）有向線分を同一視したもの。
「向き」と「大きさ（長さ）」**だけ**で決まる。

2

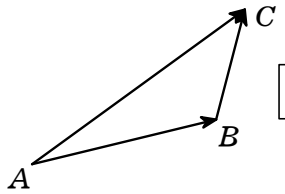
例



・有向線分AB，
有向線分CD，
有向線分EFは
互いに 違う もの。

・ベクトルAB，ベクトルCDは 同じ もの。
［ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ と書く。］

■つなぐ（ベクトルの和）　*1*



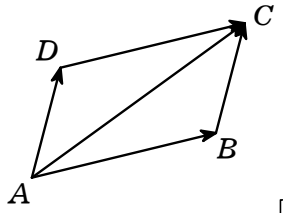
2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ の和を

$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$ と定める。

［ $\overrightarrow{AC}$ は、2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}$ をつないだもの］

ベクトルは平行移動しても同じものなので、次のようにいいかえることができる。

2



2つのベクトル $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ に対して、AB，AD を隣り合う2辺にもつ平行4辺形$ABCD$をつくったとき、

$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}}$

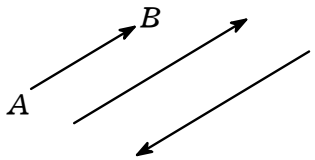
■のばす（ベクトルの実数倍） 1

ベクトル$\overrightarrow{AB}$に対して、$k\cdot\overrightarrow{AB}$ （$\overrightarrow{AB}$のk倍。kは実数）を次のように定める。

☞ $k \geqq 0$ のとき、（$k\cdot\overrightarrow{AB}$は）$\overrightarrow{AB}$と同じ向きで大きさが$k\cdot AB$であるベクトル。

☞ $k < 0$ のとき、（$k\cdot\overrightarrow{AB}$は）$\overrightarrow{AB}$と逆向きで大きさが$|k|\cdot AB$であるベクトル。

2



$k\cdot\overrightarrow{AB}$は、$\overrightarrow{AB}$をのばしたもの。

ただし、
$k \geqq 0$ のときは同じ向きに、
$k < 0$ のときは逆向きにのばす。

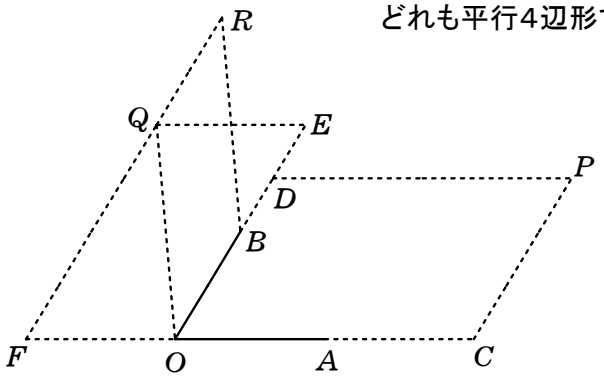
◆◆

【例題1】 下図のように3点O, A, Bが与えられているとき、次の各式で定まる各点P, Q, Rを図示せよ。

(1) $\overrightarrow{OP} = 2\cdot\overrightarrow{OA} + \frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{OB}$

(3) $\overrightarrow{BR} = -\overrightarrow{OA} + 2\cdot\overrightarrow{OB}$

解　下図において、4角形$OCPD$, $OEQF$, $OBRQ$はどれも平行4辺形である。



◆◆

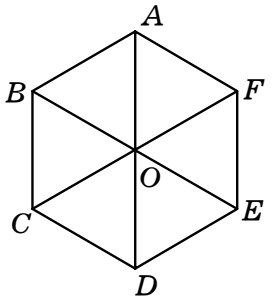
【例題2】 Oを中心とする正6角形$ABCDEF$において、$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{f}$とする。

このとき、次のベクトルを$\vec{b}$, $\vec{f}$を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{DE}$　(2) $\overrightarrow{BC}$　(3) $\overrightarrow{EC}$　(4) $\overrightarrow{AE}$　(5) $\overrightarrow{AD}$　(6) $\overrightarrow{BE}$

いろいろな平行4辺形に注目しましょう。

解　(1) $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{ED}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{b}$　(ans)



(2) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$

$=\vec{b}+\vec{f}$　(ans)

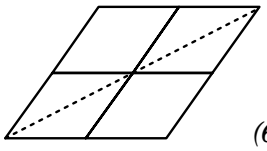
(3) $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}$

$=-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}$

$=\vec{b}-\vec{f}$　(ans)

(4) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AO}=\vec{f}+(\vec{b}+\vec{f})$　($\because$(2))

$=\vec{b}+2\vec{f}$　(ans)



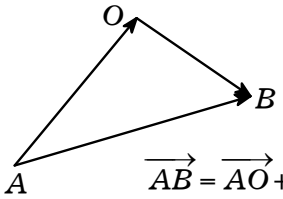
(5) $\overrightarrow{AD}=2\cdot\overrightarrow{AO}$

$=2\cdot(\vec{b}+\vec{f})=2\vec{b}+2\vec{f}$　(ans)

(6) $\overrightarrow{BE}=2\cdot\overrightarrow{BO}=2\cdot\overrightarrow{AF}=2\vec{f}$　(ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■始点を変更する公式



$\overrightarrow{AB}$を、始点がOのベクトルで表してみよう。

和（つなぐ）の定義より

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

$\therefore$ $\boxed{\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}$ ……❶

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

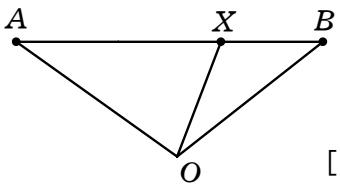
【例題3】 平面上の任意の3点A, B, Cに対して、$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

解　和（つなぐ）の定義に注意して、

左辺 $=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}=$ 右辺　(fin)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

■内分点の公式



ABを$p:q$に内分する点をXとすると、

$\overrightarrow{AX}=\dfrac{p}{p+q}\cdot\overrightarrow{AB}$ …(※)

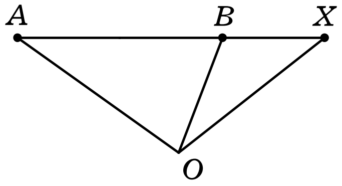
[$\because$実数倍（のばす）の定義]

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{p}{p+q}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$　[$\because$公式❶]

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\dfrac{p}{p+q}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\dfrac{q\cdot\overrightarrow{OA}+p\cdot\overrightarrow{OB}}{p+q}$

よって $\boxed{\overrightarrow{OX}=\dfrac{q\cdot\overrightarrow{OA}+p\cdot\overrightarrow{OB}}{p+q}}$ ……❷

■外分点の公式



AB を $p:q$ に外分する点を X とすると、

$p>q$ のとき、左図より

$$\overrightarrow{AX}=\frac{p}{p-q}\cdot\overrightarrow{AB}\quad\cdots(※※)$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}=\frac{p}{p-q}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+\frac{p}{p-q}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\frac{-q\cdot\overrightarrow{OA}+p\cdot\overrightarrow{OB}}{p-q}$$

よって

$$\boxed{\overrightarrow{OX}=\frac{(-q)\cdot\overrightarrow{OA}+p\cdot\overrightarrow{OB}}{p+(-q)}=\frac{q\cdot\overrightarrow{OA}+(-p)\cdot\overrightarrow{OB}}{(-p)+q}}\quad\cdots❸$$

[注] $p<q$ のときも、同じ結果が得られる。
（余力のある人は各自計算して確認。）

[注] ❸は、
『❷において p , q のどちらか一方にマイナス（－）を付けたもの』になっている。 注目しておこう !!!

◆◆

【例題4】 線分 AB を $3:2$ に内分する点を P , $3:2$ に外分する点を Q とする。また O は任意の点とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$ を、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

解 (1)「内分点の公式❷」より、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{3+2}=\frac{2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{5}\quad(ans)$$

(2)「外分点の公式❸」より、

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{(-2)\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{3+(-2)}=-2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}\quad(ans)$$

[参考] 根本である（※）や（※※）にもどって考えると、

(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{5}\cdot\overrightarrow{AB}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{3}{5}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OP}=\frac{2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{5}\quad(ans)$$

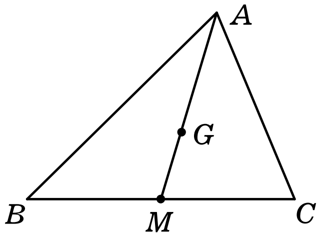
(2) $\overrightarrow{AQ}=3\cdot\overrightarrow{AB}\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=3\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{OQ}=-2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}\quad(ans)$$

◆◆

【例題5】 $\triangle ABC$ において、辺BC の中点をM，
線分AM を $2:1$ に内分する点（つまり$\triangle ABC$ の重心）を
G とする。このとき、$\overrightarrow{OG}$ を、$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。
（ただし、Oは任意の点とする）

解　M は BC を $1:1$ に内分する点なので



$$\overrightarrow{OM}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OB}+1\cdot\overrightarrow{OC}}{1+1}$$
$$=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$$

G は AM を $2:1$ に内分する点なので

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OM}}{2+1}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{OM}$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{OC}$$
$$=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\qquad (ans)$$

■3角形の重心公式
$\triangle ABC$ の重心をG とすると、

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}\qquad (O\text{は任意の点})$$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

演習1　平行4辺形$ABCD$ の辺BC，辺AD の中点をそれぞれ E，F とし、AEとBF の交点をG，CFとDE の交点をHとおく。このとき、始点,終点がA，B，C，D，E，F，G，H のいずれかであるベクトルのうち、次の各々と同じものをすべて求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$　　(2) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(3) $\overrightarrow{AG}$

演習2　同一直線上にない3点O，A，B に対して、
次の各式で定まる各点P，Q，R を図示せよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=3\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{OQ}=3\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$
(3) $\overrightarrow{AR}=-2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}$

演習3　線分AB を $3:1$ に内分する点をP，$3:1$ に外分する点をQ とする。またO は任意の点とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を、$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。
(2) $\overrightarrow{OQ}$ を、$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

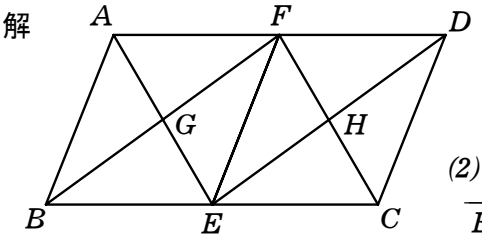
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

――演習問題の解答――――――――――――――――――――

演習1 平行4辺形$ABCD$の辺BC, 辺ADの中点をそれぞれE, Fとし、AEとBFの交点をG, CFとDEの交点をHとおく。このとき、始点,終点がA, B, C, D, E, F, G, Hのいずれかであるベクトルのうち、次の各々と同じものをすべて求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}$　　(2) $\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}$　　(3) $\overrightarrow{AG}$

解



(1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{DC}$　(ans)

(2) $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{FD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{GH}$　(ans)

(3) $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{GE}$, $\overrightarrow{FH}$, $\overrightarrow{HC}$　(ans)

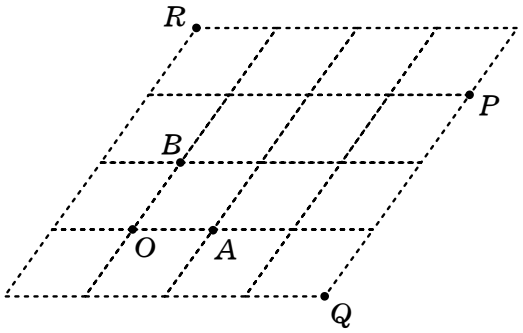
◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

演習2 同一直線上にない3点O, A, Bに対して、次の各式で定まる各点P, Q, Rを図示せよ。

(1) $\overrightarrow{OP}=3\cdot\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OB}$　　(2) $\overrightarrow{OQ}=3\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$

(3) $\overrightarrow{AR}=-2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}$

解



[注:(3)] 与式 $\Leftrightarrow \overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OA}=-2\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OR}=-\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}$

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

演習3 線分ABを$3:1$に内分する点をP, $3:1$に外分する点をQとする。またOは任意の点とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$を、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OQ}$を、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$を用いて表せ。

解 (1)「内分点の公式❷」より、

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{3+1}=\frac{\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{4}\quad (ans)$$

(2)「外分点の公式❸」より、

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{(-1)\cdot\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{3+(-1)}=\frac{-\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{2}\quad (ans)$$

[参考] 根本である（※）や（※※）にもどって考えると、

(1) $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\cdot\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\iff \overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{4}$ (ans)

(2) $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{2}\cdot\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OA}=\frac{3}{2}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$\iff \overrightarrow{OQ}=\frac{-\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB}}{2}$ (ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆