今回（2）は、《基本問題演習（積分中心）》です。

【1】（α10）　$I=\int_1^3 (x-1)(x-3)^7\,dx$ の値を求めよ。

被積分関数をむやみに展開するのは上手くない。
$(x-3)$ というカタマリを意識して計算しましょう。

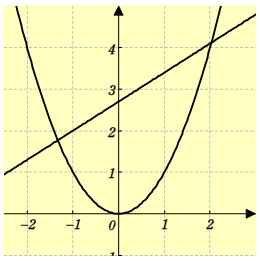
解　$(x-1)(x-3)^7=\{(x-3)+2\}(x-3)^7=(x-3)^8+2\cdot(x-3)^7$

であるので、

$$I=\int_1^3 \left\{(x-3)^8+2\cdot(x-3)^7\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{9}\cdot(x-3)^9+2\cdot\frac{1}{8}\cdot(x-3)^8\right]_1^3=-\frac{64}{9}\quad(ans)$$

◆◆◆



$y = g(x) = m\cdot(x+1) + 2$ …②

①②を連立すると

$x^2 = m\cdot(x+1) + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - m\cdot(x+1) - 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - mx - m - 2 = 0$ ……③

〔③の2解を α, β ($\alpha<\beta$)とおくと〕

$\Leftrightarrow (x-\alpha)(x-\beta) = 0$

すると、図より

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\}\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{m\cdot(x+1)+2 - x^2\right\} dx$$

$$= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)\cdot(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}\cdot(\beta-\alpha)^3$$

ここで③より

$$\alpha = \frac{m - \sqrt{m^2+4m+8}}{2}, \quad \beta = \frac{m + \sqrt{m^2+4m+8}}{2}$$

なので　$\beta - \alpha = \sqrt{m^2+4m+8}$ ……④

したがって

$$S = \frac{1}{6}\left(\sqrt{m^2+4m+8}\right)^3 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{(m+2)^2+4}\right)^3$$

$\therefore$ S は $m = -2$ のとき、最小値 $\dfrac{2^3}{6} = \dfrac{4}{3}$ をとる。 *(ans)*

[参考:④について]

$x^2 - mx - m - 2 = 0$ …③ の2解が $x = \alpha$, β なので、

解と係数の関係より　$\alpha+\beta = m$　,　$\alpha\beta = -(m+2)$

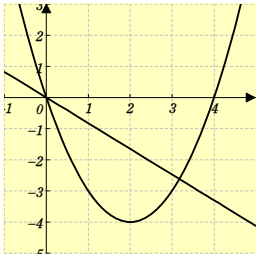
$\therefore (\beta-\alpha)^2 = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = m^2+4\cdot(m+2) = m^2+4m+8$

$\therefore \beta-\alpha = \sqrt{m^2+4m+8}$ とすることもできる。

◆◆

【3】（α 10）　xy平面において、放物線 $y=x^2-4x$ と x軸で囲まれる部分の面積 S を求めよ。また、直線 $y=kx$ が S を2等分するときの k の値を求めよ。

解　下図より $S = \displaystyle\int_0^4 \left\{-\left(x^2-4x\right)\right\} dx = -\int_0^4 x\cdot(x-4)\,dx$



$= \frac{1}{6}\cdot 4^3 = \frac{32}{3}$ (ans)

以下、$y = f(x) = x^2 - 4x$ …①

$y = g(x) = kx$ …② とおく。

①②を連立すると

$x^2 - 4x = kx \Leftrightarrow (x^2 - 4x) - kx = 0$

$\Leftrightarrow x\cdot\{x - (k+4)\} = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ k+4$

すると、①②で囲まれる部分の面積 T は

$$T = \int_0^{k+4} \{g(x) - f(x)\}\,dx = \int_0^{k+4} \left\{kx - \left(x^2 - 4x\right)\right\}dx$$

$$= -\int_0^{k+4} x\cdot\{x - (k+4)\}\,dx = \frac{1}{6}\cdot(k+4)^3$$

問題文より $T = \frac{S}{2}$ $\quad \therefore \frac{1}{6}\cdot(k+4)^3 = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{3}$

$\therefore k+4 = \sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^3\cdot 4} = 2\cdot\sqrt[3]{4}$ $\quad \therefore k = 2\cdot\sqrt[3]{4} - 4$ (ans)

[参考] 積分区間の端点の1つが0のときは、公式❶を使わなくてもカンタンに計算できることが多いです。

◆◆◆

よって、図を見て、求める面積 S は

S =〔①②で囲まれる部分の面積〕

　　ー 2〔①と x 軸で囲まれる部分の面積〕

さて、〔①②で囲まれる部分の面積〕

$$= \int_0^4 \{g(x)-f(x)\}\,dx = \int_0^4 \left\{2x-(x^2-2x)\right\}\,dx$$

$$= -\int_0^4 x\cdot(x-4)\,dx = \frac{1}{6}\cdot 4^3$$

〔①と x 軸で囲まれる部分の面積〕

$$= -\int_0^2 x\cdot(x-2)\,dx = \frac{1}{6}\cdot 2^3$$

であるので、

$$S = \frac{1}{6}\cdot 4^3 - 2\cdot\frac{1}{6}\cdot 2^3 = \frac{64-16}{6} = 8 \quad (ans)$$

◆◆◆

さて、①の2解は

$\alpha = \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}a$, $\beta = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}a$ であるので、

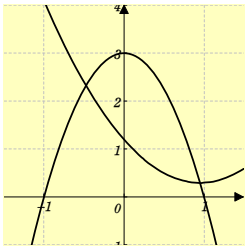
$\beta - \alpha = \sqrt{3}a$

$\therefore S = \dfrac{1}{3}\cdot(\sqrt{3}a)^3 = \sqrt{3}a^3$ $\quad$ (ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【6】（α 10） 曲線 $y=-3x^2+3$ と x軸で囲まれる図形の面積が、曲線 $y=x^2-2ax-2a^2+3$ で2等分されるとき、a の値を求めよ。ただし、$0<a<1$ とする。

解 $y = -3x^2+3 = -3\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ と x軸で囲まれる部分の



面積 S は

$S = -3\displaystyle\int_{-1}^{1}(x+1)\cdot(x-1)\,dx$

$= 3\cdot\dfrac{1}{6}\cdot 2^3 = 4$

以下、

$y = f(x) = -3x^2+3$, $y = g(x) = x^2-2ax-2a^2+3$ とおく。

$y=f(x)$, $y=g(x)$ を連立すると

$-3x^2+3 = x^2-2ax-2a^2+3 \Leftrightarrow 4x^2-2ax-2a^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(2x+a)\cdot(x-a) = 0 \Leftrightarrow 4\left(x+\dfrac{a}{2}\right)(x-a) = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{a}{2}, a$

よって、2曲線 $y=f(x)$, $y=g(x)$ で囲まれる部分の

面積 T は

$T = \displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\{f(x)-g(x)\}\,dx = -4\int_{-\frac{a}{2}}^{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)(x-a)\,dx$

$= 4\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left\{a-\left(-\dfrac{a}{2}\right)\right\}^3 = \dfrac{2}{3}\cdot\left(\dfrac{3}{2}a\right)^3 = \dfrac{9}{4}a^3$

問題文より $T = \dfrac{S}{2}$

$\therefore \dfrac{9}{4}a^3 = \dfrac{1}{2}\cdot 4$ $\qquad \therefore a^3 = \dfrac{8}{9}$ $\qquad \therefore a = \dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}$ $\quad$ (ans)

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

【7】（α10） 2曲線 $y=x^2+2x+1$, $y=-3x^2+ax+b$ が点 $(1, 4)$ で接するとき、a の値を求めよ。また、これら2曲線と y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

解 $y=f(x)=x^2+2x+1$, $y=g(x)=-3x^2+ax+b$ が

$x=1$ で接する条件は

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2+2x+1=-3x^2+ax+b$

$\Leftrightarrow 4x^2+(2-a)\cdot x+(1-b)=0$ が $x=1$ を重解にもつこと。

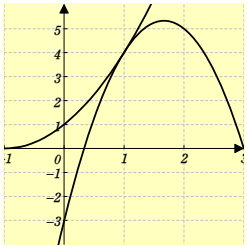
すなわち

$4x^2+(2-a)\cdot x+(1-b)=4\cdot(x-1)^2$ （xの恒等式）

であること。

両辺の係数を比較して

$2-a=-8$, $1-b=4$ $\therefore a=10$, $b=-3$ (ans)



したがって $y=f(x)=x^2+2x+1$,

$y=g(x)=-3x^2+10x-3$

のグラフ（左図）より

求める面積は

$$\int_0^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^1 4\cdot(x-1)^2\,dx$$

$$=\left[4\cdot\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1=\frac{4}{3} \quad (ans)$$

◆◆

【8】（α10） 放物線 $y=ax^2+bx+c$ は、頂点の座標が $(2, -4)$ で、放物線 $y=-ax^2$ と接するとき、a , b , c の値を求めよ。また、この2つの放物線と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ の頂点の座標が $(2, -4)$

なので、$y=f(x)=a\cdot(x-2)^2-4$ ……① と表せる。

これと $y=g(x)=-a\cdot x^2$ を連立すると

$a\cdot(x-2)^2-4=-a\cdot x^2 \Leftrightarrow a\cdot x^2-2a\cdot x+2\cdot(a-1)=0$ ……②

問題文より、②は重解をもつので

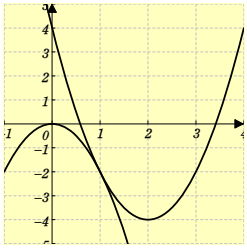
（判別式/4）$= a^2 - a\cdot 2(a-1) = 0$　　$\therefore a\cdot(-a+2) = 0$

$\therefore a = 2$ （$\neq 0$）　　(ans)

したがって

$$\begin{cases} y = f(x) = 2x^2 - 8x + 4 \quad (\because ①) \quad (\therefore b = -8,\ c = 4) \\ y = g(x) = -2x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (ans) \end{cases}$$

であり、$f(x) - g(x) = (2x^2 - 8x + 4) - (-2x^2)$



$= 4x^2 - 8x + 4 = 4\cdot(x-1)^2$

（②の重解は $x = 1$ ）

よって左図より、求める面積は

$$\int_0^1 4\cdot(x-1)^2\,dx = \left[4\cdot\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_0^1 = \frac{4}{3} \qquad (ans)$$

◆◆◆

$$S = \left| \int_b^a \{ f(x) - \ell(x) \}\, dx \right| = \left| \int_b^a (x-a)^2 (x-b)\, dx \right|$$

$$\boxed{\begin{aligned} (x-a)^2(x-b) &= (x-a)^2\{ (x-a) - (b-a) \} \\ &= (x-a)^3 - (b-a)\cdot(x-a)^2 \end{aligned}}$$

$$= \left| \left[\frac{1}{4}\cdot(x-a)^4 - (b-a)\cdot\frac{1}{3}\cdot(x-a)^3 \right]_b^a \right|$$

$$= \frac{1}{12}\cdot(b-a)^4 = \frac{1}{12}\cdot(1-3a)^4 \quad (\because ②) \quad (ans)$$

[参考] [※]について。 解と係数の関係を用いると

$a+a+b = 1 \qquad \therefore b = 1-2a$ …② が出てきますね。

◆◆◆

したがって、求める面積は（図を見て）

$$\int_{-1}^{2}\left\{(3x+2)-x^3\right\}dx=-\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)\,dx$$

$$(x+1)^2(x-2)=(x+1)^2(x+1-3)=(x+1)^3-3\cdot(x+1)^2$$

$$=-\left[\frac{1}{4}\cdot(x+1)^4-(x+1)^3\right]_{-1}^{2}=\frac{27}{4}\quad(ans)$$

[別解] 上の解答では（はじめの方で）『接線公式』を用いましたが、次のように『重解条件』で解くこともできます。

$\ell : y=ax+2$ とおく。また、

C, ℓ の接点の x 座標を p, 交点の x 座標を q とおく。

すると、$x^3-(ax+2)=0$ の解が $x=p$（重解）, q

であるので

$$x^3-(ax+2)=(x-p)^2(x-q)\quad(x\text{の恒等式})$$

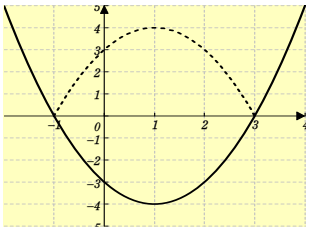
$$=(x^2-2px+p^2)\cdot(x-q)$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{cases}0=-q-2p\\-a=2pq+p^2\\-2=-p^2q\end{cases}\quad\therefore\begin{cases}p=-1\\q=2\\a=3\end{cases}\quad\text{〈以下略〉}$$

◆◆◆

(ⅰ) $1-k \leqq 0$　i.e.　$1 \leqq k$ のとき:



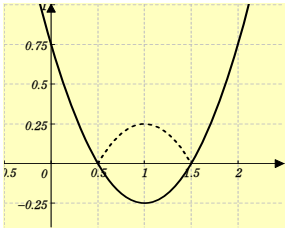
$y=f(x)$ のグラフは左図のようになるので

$$A(k) = \int_0^1 \{-f(x)\}\,dx$$

$$= -\int_0^1 \left\{(x-1)^2 - k^2\right\} dx$$

$$= -\left[\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - k^2\cdot x\right]_0^1 = -\frac{1}{3} + k^2 \quad (ans)$$

(ⅱ) $0 \leqq 1-k$　i.e.　$(0 \leqq)\ k \leqq 1$ のとき:



$y=f(x)$ のグラフは左図のようになるので

$$A(k) = \int_0^{1-k} f(x)\,dx + \int_{1-k}^1 \{-f(x)\}\,dx$$

$$= \int_0^{1-k} f(x)\,dx + \int_1^{1-k} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1-k} \left\{(x-1)^2 - k^2\right\} dx + \int_1^{1-k} \left\{(x-1)^2 - k^2\right\} dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - k^2\cdot x\right]_0^{1-k} + \left[\frac{1}{3}\cdot(x-1)^3 - k^2\cdot x\right]_1^{1-k}$$

$$= \cdots\cdots\cdots = \frac{4}{3}k^3 - k^2 + \frac{1}{3} \quad (ans)$$

◆◆

■ a, b : 定数　のとき　$\int_a^b f(t)\,dt$ は定数

【12】(α10)　関係式 $f(x) = -\frac{1}{2} + \int_0^1 (x+t)\cdot f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

解　$f(x) = -\frac{1}{2} + \int_0^1 \{x\cdot f(t) + t\cdot f(t)\}\,dt$

$$= -\frac{1}{2} + x\int_0^1 f(t)\,dt + \int_0^1 t\cdot f(t)\,dt \cdots\cdots ①$$

ここで、$\int_0^1 f(t)\,dt = a$（定数），$\int_0^1 t{\cdot}f(t)\,dt = b$（定数）

とおくと

$$① \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = ax + b - \dfrac{1}{2} \cdots\cdots② \\ a = \int_0^1 f(t)\,dt \cdots③ \ ,\ b = \int_0^1 t{\cdot}f(t)\,dt \cdots④ \end{cases}$$

すると、②③より

$$a = \int_0^1 \left(at + b - \frac{1}{2}\right) dt = \left[a{\cdot}\frac{t^2}{2} + \left(b - \frac{1}{2}\right){\cdot}t\right]_0^1$$

$$= \frac{a}{2} + b - \frac{1}{2} \qquad \therefore a - 2b = -1 \ \cdots\cdots⑤$$

同様に、②④より

$$b = \int_0^1 t\left(at + b - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 \left\{at^2 + \left(b - \frac{1}{2}\right){\cdot}t\right\} dt$$

$$= \left[a{\cdot}\frac{t^3}{3} + \left(b - \frac{1}{2}\right){\cdot}\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore 4a - 6b = 3 \ \cdots\cdots⑥$$

⑤⑥を解いて　$a = 6$ ，$b = \dfrac{7}{2}$

これらを②に代入して $f(x) = 6x+3$　(ans)

◆◆

■同値変形　（の1例）

$F(x) = G(x)$　$\Leftrightarrow$　$\begin{cases} F'(x) = G'(x) \ \text{（恒等式）} \\ F(a) = G(a) \ \text{（}a\text{は任意の定数）} \end{cases}$

（恒等式）

■ a : 定数　のとき

$\int_a^x f(t)\,dt$ は、《 x の関数》であり

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x) \ \cdots\cdots[※]$$

注）: [※]は、インテグラルの中身に x がいないときの話

【13】（α10） xの恒等式

$\int_1^x (at^2+6t+b)\,dt = 2x^3+cx^2+5x+d$ において、

a , b , c , d の値を求めよ。

解 $\int_1^x (at^2+6t+b)\,dt = 2x^3+cx^2+5x+d$ （xの恒等式）

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+6x+b = 6x^2+2c\cdot x+5 \cdots ① \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{（両辺を } x \text{ で微分した）} \\ 0 = 2+c+5+d \cdots\cdots ② \quad \text{（両辺に } x=1 \text{ を代入した）} \end{cases}$$

①の両辺の係数を比較して、$a=6$ ， $c=3$ ， $b=5$

これと②より、$d=-10$ *(ans)*

◆◆